0.1　バーコフの定理とシュヴァルツシルトの外部解の導出

球対称な重力場をした天体の周りの真空な空間の領域の時空はその天体のエネルギー分布が動径方向に運動してたとしても静的であり，シュヴァルツシルトの外部解になる，というのがバーコフ（Birkhoff）の定理である．この定理によれば，球対称性を保ってさえいれば，重力収縮している天体でも，外部の真空な領域では，原点を天体の中心にとったとき，同じ質量の質点が原点にある場合の時空と全くおなじになり，したがって時空は外部では静的になることになる．このことから，時空の動的な歪みである重力波は例え重力収縮している天体でも，球対称性を持ってさえいれば，全く出てこないことがいえる．この節では，一般相対論では重要な定理であるバーコフの定理を示す．また，バーコフの定理が成り立つ状況で，エネルギー分布の無い真空な領域の時空がシュヴァルツシルトの外部解になることは，次節で示す．

0.1.1　球対称時空の計量

球対称時空の世界間隔の最も一般的な形は，

$$ds^2 = -A(t, r)(dx^0)^2 + B(t, r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

である．　これより，計量の共変成分は，

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= g_{00} = -A(t, r), \\
g_{rr} &= g_{11} = B(t, r), \\
g_{\theta\theta} &= g_{22} = r^2, \\
g_{\varphi\varphi} &= g_{33} = r^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

となり，対角成分しか無いことがわかる．したがって計量の反変成分 $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$ は対角行列の逆行列だから，やっぱり対角行列となり，

$$
\begin{aligned}
g^{tt} &= g^{00} = -\frac{1}{A(t,\,r)}, \\
g^{rr} &= g^{11} = \frac{1}{B(t,\,r)}, \\
g^{\theta\theta} &= g^{22} = \frac{1}{r^2}, \\
g^{\varphi\varphi} &= g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

となることになる．この与えられた計量を用いて，早速接続係数を求めてみよう．なお，式の表記を簡単にするため，$A(t,\,r)$ などは単に A と表すことにする．また，$x^0 = ct$ での微分をドット『$\cdot$』で表し，$x^1 = r$ での微分をプライム『$'$』で表すことにする．

0.1.2　接続係数を求める

まず，接続係数は計量を用いて，次のように表されるのであった

$$
\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\omega}(g_{\omega\beta,\,\gamma} + g_{\omega\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,\omega})
$$

これより，α の値別に接続係数を求めてみよう．計算は大変長いが多くの項はゼロになってしまう．面倒な割には無駄に思える計算が続くが，こういう泥臭い計算を正確に行えることは，現在のように，Mathematica や Maxima などで接続係数やリッチテンソルが瞬時に計算できるような時代になるまでは非常に重要な事であった．計算のポイントは，ゼロになってしまう項をできるだけ早く見つけてしまうことである．特に簡単に見つかるケースとしては，

1. 計量の非対角成分またはその微分．（例:$g_{12,\,1} = 0$）
2. 計量は全て φ を含まないので，$x^3 = \varphi$ での微分．（例:$g_{22,\,3} = 0$）

の場合である．このことに注意して以下，求めてみよう．

$\alpha = 0$ の場合

接続係数は $g^{\mu\nu}$ が対角成分しか持たないことより,

$$\Gamma^0{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{00}(g_{0\beta,\,\gamma} + g_{0\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,0}) \tag{1}$$

と表される．ここで実は $\beta > 1$ または $\gamma > 1$ のとき，$\Gamma^0{}_{\beta\gamma} = 0$ となる．$\Gamma^0{}_{\beta\gamma} = \Gamma^0{}_{\gamma\beta}$ だから，$\beta > 1$ としても，一般性を失わない．このとき，カッコの中の初項は計量の非対角成分の微分だから，必ずゼロになる．第 2 項目は，$\gamma = 0$ のときに限り計量の対角成分 g_{00} になるが，$g_{00} = -A(t, r)$ より，θ または φ の微分でゼロになってしまう．最後に，第 3 項がゼロでないためには $g_{22} = r^2$ か $g_{33} = r^2 \sin^2\theta$ であるべきだが，これの $x^0 = ct$ での微分は当然ゼロになる．以上により (1) 式右辺のカッコの中身は全てゼロになるので，この条件の下では $\Gamma^0{}_{\beta\gamma} = 0$ が成り立つことが分かった．これより，ゼロでない成分は，$\beta \leq 1$ かつ $\gamma \leq 1$ の場合に限られる．計算すると,

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2} g^{00}(g_{00,\,0} + \cancel{g_{00,\,0}} - \cancel{g_{00,\,0}}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A}\right)\left(-\dot{A}\right) = \frac{\dot{A}}{2A}$$

$$\Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\cancel{g_{01,\,0}} + g_{00,\,1} - \cancel{g_{01,\,0}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A}\right)(-A') = \frac{A'}{2A}$$

$$\Gamma^0{}_{11} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\cancel{g_{01,\,1}} + \cancel{g_{01,\,1}} - g_{11,\,0}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{A}\right)\left(-\dot{B}\right) = \frac{\dot{B}}{2A}$$

$\alpha = 1$ の場合

接続係数は,

$$\Gamma^1{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{1\beta,\,\gamma} + g_{1\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,1}) \tag{2}$$

である．$\beta > 1$ または $\gamma > 1$ のとき，$\Gamma^1{}_{\beta\gamma} = \Gamma^1{}_{\gamma\beta}$ より,$\beta > 1$ と仮定しても一般性を失わない．このとき，(2) 式右辺カッコ内の初項は計量の非対角成分の微分だからゼロになる．また第 2 項目は $\gamma = 1$ 以外は $g_{1\gamma} = 0$ とな

るが，$g_{11} = B(t,\, r)$ より，$g_{11,\,\beta}$ は，θ または φ での微分なので，ゼロになる．以上により，

$$\Gamma^1{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{11} \left(-g_{\gamma\beta,\,1}\right)$$

となるので，この条件下では，$\beta = \gamma$ のときに限りゼロでない値をとる．計算すると，

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2} g^{11} \left(-g_{22,\,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{B}(-2r) = -\frac{r}{B} \\
\Gamma^1{}_{33} &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{33,\,1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{B}(-2r\sin^2\theta) = -\frac{r}{B}\sin^2\theta = \Gamma^1{}_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

となる．一方，$\beta \leq 1$ かつ $\gamma \leq 1$ のときは，

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{00} &= \frac{1}{2} g^{11}(-g_{00,\,1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{B}(A') = \frac{A'}{2B} \\
\Gamma^1{}_{01} &= \Gamma^1{}_{10} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,\,0} + g_{10,\,1} - g_{01,\,1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{B}(\dot{B}) = \frac{\dot{B}}{2B} \\
\Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,\,1} + \cancel{g_{11,\,1}} - \cancel{g_{11,\,1}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{B}(B') = \frac{B'}{2B}
\end{aligned}$$

となる．

$\alpha = 2$ の場合

接続係数は，

$$\Gamma^2{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{2\beta,\,\gamma} + g_{2\gamma,\,\beta} - g_{\gamma\beta,\,2})$$

である．

$\beta = 0$ のとき，

$$\Gamma^2{}_{0\gamma} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{20,\,\gamma} + g_{2\gamma,\,0} - g_{\gamma 0,\,2}) = \frac{1}{2} g^{22}(g_{2\gamma,\,0} - g_{\gamma 0,\,2})$$

であるが，右辺カッコ内の第 1 項が $g_{22,\,0}$ だとすれば，$g_{22} = r^2$ は時間を含まないので $g_{22,\,0} = 0$ で 2 項目も $g_{\gamma 0}$ が θ を含まないので $g_{\gamma 0,\,2} = 0$ となるので，結局全体としてゼロになってしまう．

$\beta = 1$ のとき，

$$\Gamma^2{}_{1\gamma} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{21,\,\gamma} + g_{2\gamma,\,1} - g_{\gamma 1,\,2}) = \frac{1}{2} g^{22}(g_{2\gamma,\,1} - g_{\gamma 1,\,2})$$

であるが，右辺第 2 項は $g_{\gamma 1}$ が θ を含まないのでゼロになる．よってこのとき，ゼロにならないためには，$\gamma = 2$ が必要で，このとき，

$$\Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{22,\,1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}(2r) = \frac{1}{r}$$

となる．

$\beta = 2$ のとき，$\gamma = 1$ の場合は，$\Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12}$ より求めたので，$\gamma \neq 1$ としてよい．すると，

$$\Gamma^2{}_{02} = \Gamma^2{}_{20} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{22,\,0} + \cancel{g_{20,\,2}} - \cancel{g_{02,\,2}}) = \frac{1}{2} g^{22}(\dot{r^2}) = 0$$

$$\Gamma^2{}_{32} = \Gamma^2{}_{23} = \frac{1}{2} g^{22}(g_{22,\,3} + \cancel{g_{23,\,2}} - \cancel{g_{32,\,2}}) = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_\varphi r^2) = 0$$

$$\Gamma^2{}_{22} = g^{22}(g_{22,\,2} + \cancel{g_{22,\,2}} - \cancel{g_{22,\,2}}) = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_\theta r^2) = 0$$

$\beta = 3$ のとき，

$$\Gamma^2{}_{3\gamma} = \frac{1}{2} g^{22}(\cancel{g_{23,\,\gamma}} + \cancel{g_{2\gamma,\,3}} - g_{\gamma 3,\,2}) = \frac{1}{2} g^{22}(-g_{\gamma 3,\,2})$$

なので，ゼロにならないのは，$\gamma = 3$ の場合で，

$$\Gamma^2{}_{33} = \frac{1}{2} g^{22}(-g_{33,\,2}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\partial_\theta(r^2 \sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta$$

となる．

$\alpha = 3$ の場合

$$\Gamma^3{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{3\beta,\,\gamma} + g_{3\gamma,\,\beta} - \cancel{g_{\gamma\beta,\,3}}) = \frac{1}{2}g^{33}(g_{3\beta,\,\gamma} + g_{3\gamma,\,\beta})$$

なので，β か γ のいずれかは 3 でなくてはならないが，両方 3 だと右辺カッコ内の全ての項が，$x^3 = \varphi$ での微分だからゼロになってしまう．すると，

$$\Gamma^3{}_{03} = \Gamma^3{}_{30} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,\,0} + \cancel{g_{30,\,3}}) = \frac{1}{2}g^{33}(r^2\,\dot{\sin}^2\theta) = 0$$

$$\Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,\,1} + \cancel{g_{31,\,3}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(2r\sin^2\theta) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,\,2} + \cancel{g_{32,\,3}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(2r^2\sin\theta\cos\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となる．以上より，接続係数のゼロでない成分は，

接続係数のゼロでない成分

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{\dot{A}}{2A}, \Gamma^0{}_{01} = \frac{A'}{2A}, \Gamma^0{}_{11} = \frac{\dot{B}}{2A},$$
$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{A'}{2B}, \Gamma^1{}_{01} = \frac{\dot{B}}{2B}, \Gamma^1{}_{11} = \frac{B'}{2B},$$
$$\Gamma^1{}_{22} = -\frac{r}{B}, \Gamma^1{}_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{B} = \Gamma^1{}_{22}\sin^2\theta,$$
$$\Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}, \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}, \Gamma^3{}_{23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta,$$

となる．これを用いて，次はリッチテンソルを求めよう．

0.1.3　リッチテンソルを求める

リッチテンソルはリーマンテンソルを用いて次のようにあらわされるのであった:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} =& R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} \\
=& \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu,\,\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma,\,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}
$$

これよりリッチテンソルを求めるが，リッチテンソルの 2 つの添え字の対称性より，リッチテンソルは全部で 10 成分しかない．そこで今回は機械的に全ての成分を計算することにしよう．

$$
\begin{aligned}
R_{00} =& \Gamma^{\sigma}{}_{00,\,\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{0\sigma,\,0} + \Gamma^{\lambda}{}_{00}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda 0} \\
=& \cancel{\Gamma^{0}{}_{00,\,0}} + \Gamma^{1}{}_{00,\,1} - \cancel{\Gamma^{0}{}_{00,\,0}} - \Gamma^{1}{}_{01,\,0} + \cancel{\Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{00}} + \Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{1}{}_{01} \\
& + \xcancel{\Gamma^{1}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{10}} + \Gamma^{1}{}_{00}\Gamma^{1}{}_{11} + \Gamma^{1}{}_{00}\Gamma^{2}{}_{12} + \Gamma^{1}{}_{00}\Gamma^{3}{}_{13} - \cancel{\Gamma^{0}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{00}} \\
& - \xcancel{\Gamma^{0}{}_{01}\Gamma^{1}{}_{00}} - \Gamma^{1}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{10} - \Gamma^{1}{}_{01}\Gamma^{1}{}_{10} \\
=& \left(\frac{A'}{2B}\right)' - \partial_0\left(\frac{\dot{B}}{2B}\right) + \frac{\dot{A}}{2A}\frac{\dot{B}}{2B} + \frac{A'}{2B}\frac{B'}{2B} + \frac{A'}{2B}\frac{1}{r} \\
& + \frac{A'}{2B}\frac{1}{r} - \frac{A'}{2B}\frac{A'}{2A} - \left(\frac{\dot{B}}{2B}\right)^2 \\
=& \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{2B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{(\dot{B})^2}{2B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB} - \frac{(A')^2}{4AB} - \frac{(\dot{B})^2}{4B^2} \\
=& -\frac{A'B'}{4B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{(\dot{B})^2}{4B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{01} =& \varGamma^{\sigma}{}_{01,\,\sigma} - \varGamma^{\sigma}{}_{0\sigma,\,1} + \varGamma^{\lambda}{}_{01}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \varGamma^{\lambda}{}_{0\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 1} \\
=& \varGamma^{0}{}_{01,\,1} + \cancelto{1}{\varGamma^{1}{}_{01,\,1}} - \varGamma^{0}{}_{00,\,1} - \cancelto{1}{\varGamma^{1}{}_{01,\,1}} + \cancelto{2}{\varGamma^{0}{}_{01}\varGamma^{0}{}_{00}} + \cancelto{3}{\varGamma^{0}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{01}} \\
& + \varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{0}{}_{10} + \cancelto{4}{\varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{11}} + \varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{2}{}_{12} + \varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{3}{}_{13} - \cancelto{2}{\varGamma^{0}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{01}} \\
& - \cancelto{3}{\varGamma^{0}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{01}} - \varGamma^{1}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{11} - \cancelto{4}{\varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{11}} \\
=& \partial_0\left(\frac{A'}{2A}\right) - \left(\frac{\dot{A}}{2A}\right)' + \frac{\dot{B}}{2B}\frac{A'}{2A} + \frac{\dot{B}}{2B}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\dot{B}}{2B}\cdot\frac{1}{r} - \frac{A'}{2B}\frac{\dot{B}}{2A} \\
=& \cancel{\frac{(\dot{A}')}{2A}} - \xcancel{\frac{A'\dot{A}}{2A^2}} - \cancel{\frac{(\dot{A})'}{2A}} + \xcancel{\frac{\dot{A}A'}{2A^2}} + \xcancel{\frac{A'\dot{B}}{4AB}} + \frac{\dot{B}}{rB} - \xcancel{\frac{A'\dot{B}}{4AB}} \\
=& \frac{\dot{B}}{rB}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{02} =& \cancel{\varGamma^{\sigma}{}_{02,\,\sigma}} - \varGamma^{\sigma}{}_{0\sigma,\,2} + \cancel{\varGamma^{\lambda}{}_{02}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}} - \varGamma^{\lambda}{}_{0\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 2} \\
=& -\varGamma^{0}{}_{00,\,2} - \varGamma^{1}{}_{01,\,2} - \varGamma^{0}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{02} - \varGamma^{0}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{02} \\
& - \varGamma^{1}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{12} - \varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{12} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{03} =& \cancel{\varGamma^{\sigma}{}_{03,\,\sigma}} - \cancel{\varGamma^{\sigma}{}_{0\sigma,\,3}} + \xcancel{\varGamma^{\lambda}{}_{03}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}} - \varGamma^{\lambda}{}_{0\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 3} \\
=& -\varGamma^{0}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{03} - \varGamma^{0}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{03} - \varGamma^{1}{}_{00}\varGamma^{0}{}_{13} - \varGamma^{1}{}_{01}\varGamma^{1}{}_{13} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{11} =&\varGamma^{\sigma}{}_{11,\,\sigma} - \varGamma^{\sigma}{}_{1\sigma,\,1} + \varGamma^{\lambda}{}_{11}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \varGamma^{\lambda}{}_{1\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 1} \\
=&\varGamma^{0}{}_{11,\,0} + \cancel{\varGamma^{1}{}_{11,\,1}} + \varGamma^{0}{}_{10,\,1} - \cancel{\varGamma^{1}{}_{11,\,1}} - \varGamma^{2}{}_{12,\,1} - \varGamma^{3}{}_{13,\,1} \\
&+ \varGamma^{0}{}_{11}\varGamma^{0}{}_{00} + \cancel{\varGamma^{0}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{01}} + \varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{0}{}_{10} + \cancel{\varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{11}} + \varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{2}{}_{12} \\
&+ \varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{3}{}_{13} - \varGamma^{0}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{01} - \cancel{\varGamma^{0}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{01}} - \varGamma^{1}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{11} - \cancel{\varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{11}} \\
&- \varGamma^{2}{}_{12}\varGamma^{2}{}_{21} - \varGamma^{3}{}_{13}\varGamma^{3}{}_{31} \\
=&\partial_0\left(\frac{\dot{B}}{2A}\right) - \left(\frac{A'}{2A}\right)' - \left(\frac{1}{r}\right)' - \left(\frac{1}{r}\right)' + \frac{\dot{B}}{2A}\frac{\dot{A}}{2A} + \frac{B'}{2B}\frac{A'}{2A} \\
&+ \frac{B'}{2B}\frac{1}{r} + \frac{B'}{2B}\frac{1}{r} - \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 - \frac{\dot{B}}{2B}\frac{\dot{B}}{2A} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \\
=&\frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{2A^2} - \frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{2A^2} + \cancel{\frac{1}{r^2}} + \cancel{\frac{1}{r^2}} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB} \\
&- \frac{(A')^2}{4A^2} - \frac{(\dot{B})^2}{4AB} - \cancel{\frac{1}{r^2}} - \cancel{\frac{1}{r^2}} \\
=&\frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB} + \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{(\dot{B})^2}{4AB} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2} - \frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{12} =&\varGamma^{\sigma}{}_{12,\,\sigma} - \varGamma^{\sigma}{}_{1\sigma,\,2} + \varGamma^{\lambda}{}_{12}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \varGamma^{\lambda}{}_{1\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 2} \\
=&\cancel{\varGamma^{2}{}_{12,\,2}} - \varGamma^{0}{}_{10,\,2} - \varGamma^{1}{}_{11,\,2} - \cancel{\varGamma^{2}{}_{12,\,2}} - \varGamma^{3}{}_{13,\,2} + \varGamma^{2}{}_{12}\varGamma^{3}{}_{23} \\
&- \varGamma^{0}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{02} - \varGamma^{0}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{02} - \varGamma^{1}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{12} - \varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{12} - \varGamma^{2}{}_{12}\varGamma^{2}{}_{22} \\
&- \varGamma^{3}{}_{13}\varGamma^{3}{}_{32} \\
=&-\partial_\theta\left(\frac{A'}{2A}\right) - \partial_\theta\left(\frac{B'}{2B}\right) + \frac{1}{r}\cot\theta - \frac{1}{r}\cot\theta \\
=&0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{13} =&\varGamma^{\sigma}{}_{13,\,\sigma} - \cancel{\varGamma^{\sigma}{}_{1\sigma,\,3}} + \varGamma^{\lambda}{}_{13}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma} - \varGamma^{\lambda}{}_{1\sigma}\varGamma^{\sigma}{}_{\lambda 3} \\
=&\cancel{\varGamma^{3}{}_{13,\,3}} + \varGamma^{3}{}_{13}\varGamma^{3}{}_{33} - \varGamma^{0}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{03} - \varGamma^{0}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{03} - \varGamma^{1}{}_{10}\varGamma^{0}{}_{13} \\
&- \varGamma^{1}{}_{11}\varGamma^{1}{}_{13} - \varGamma^{2}{}_{12}\varGamma^{2}{}_{23} - \varGamma^{3}{}_{13}\varGamma^{3}_{33} \\
=&0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} =& {\Gamma^{\sigma}}_{22,\,\sigma} - {\Gamma^{\sigma}}_{2\sigma,\,2} + {\Gamma^{\lambda}}_{22}{\Gamma^{\sigma}}_{\lambda\sigma} - {\Gamma^{\lambda}}_{2\sigma}{\Gamma^{\sigma}}_{\lambda 2} \\
=& {\Gamma^{1}}_{22,\,1} - {\Gamma^{3}}_{23,\,2} + {\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{0}}_{10} + {\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{1}}_{11} + \cancel{{\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{2}}_{12}} \\
&+ {\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{3}}_{13} - \cancel{{\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{2}}_{12}} - {\Gamma^{2}}_{21}{\Gamma^{1}}_{22} - {\Gamma^{3}}_{23}{\Gamma^{3}}_{32} \\
=& \left(-\frac{r}{B}\right)' - \partial_\theta \cot\theta + \left(-\frac{r}{B}\right)\frac{A'}{2A} + \left(-\frac{r}{B}\right)\frac{B'}{2B} + \cancel{\left(-\frac{r}{B}\right)\frac{1}{r}} \\
&- \cancel{\frac{1}{r}\left(-\frac{r}{B}\right)} - (\cot\theta)^2 \\
=& -\frac{1}{B} + \frac{rB'}{B^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
=& \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{23} =& {\Gamma^{\sigma}}_{23,\,\sigma} - \cancel{{\Gamma^{\sigma}}_{2\sigma,\,3}} + {\Gamma^{\lambda}}_{23}{\Gamma^{\sigma}}_{\lambda\sigma} - {\Gamma^{\lambda}}_{2\sigma}{\Gamma^{\sigma}}_{\lambda 3} \\
=& {\Gamma^{3}}_{23,\,3} + {\Gamma^{3}}_{23}{\Gamma^{3}}_{33} - {\Gamma^{1}}_{22}{\Gamma^{2}}_{13} - {\Gamma^{2}}_{21}{\Gamma^{1}}_{23} \\
=& 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33} =& {\mathit{\Gamma}^{\sigma}}_{33,\,\sigma} - \cancel{{\mathit{\Gamma}^{\sigma}}_{3\sigma,\,3}} + {\mathit{\Gamma}^{\lambda}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{\sigma}}_{\lambda\sigma} - {\mathit{\Gamma}^{\lambda}}_{3\sigma}{\mathit{\Gamma}^{\sigma}}_{\lambda 3} \\
=& {\mathit{\Gamma}^{1}}_{33,\,1} + {\mathit{\Gamma}^{2}}_{33,\,2} + {\mathit{\Gamma}^{1}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{0}}_{10} + {\mathit{\Gamma}^{1}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{1}}_{11} + {\mathit{\Gamma}^{1}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{2}}_{12} \\
& + \cancel{{\mathit{\Gamma}^{1}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{3}}_{13}} + \cancel{{\mathit{\Gamma}^{2}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{3}}_{23}} - \cancel{{\mathit{\Gamma}^{1}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{3}}_{13}} - \cancel{{\mathit{\Gamma}^{2}}_{33}{\mathit{\Gamma}^{3}}_{23}} \\
& - {\mathit{\Gamma}^{3}}_{31}{\mathit{\Gamma}^{1}}_{33} - {\mathit{\Gamma}^{3}}_{32}{\mathit{\Gamma}^{2}}_{33} \\
=& \left(-\frac{r\sin^2\theta}{B}\right)' + \partial_\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + \left(-\frac{r\sin^2\theta}{B}\right)\frac{A'}{2A} \\
& + \left(-\frac{r\sin^2\theta}{B}\right)\frac{B'}{2B} + \left(-\frac{r\sin^2\theta}{B}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\left(-\frac{r\sin^2\theta}{B}\right) \\
& - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(-\sin\theta\cos\theta\right) \\
=& -\frac{\sin^2\theta}{B} + \frac{r\sin^2\theta B'}{B^2} - \cancel{\cos^2\theta} + \sin^2\theta - \frac{r\sin^2\theta A'}{2AB} - \frac{r\sin^2\theta B'}{2B^2} \\
& - \cancel{\frac{\sin^2\theta}{B}} + \cancel{\frac{\sin^2\theta}{B}} + \cancel{\cos^2\theta} \\
=& \frac{r\sin^2\theta B'}{2B^2} - \frac{r\sin^2\theta A'}{2AB} - \frac{\sin^2\theta}{B} + \sin^2\theta \\
=& \left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + 1\right)\sin^2\theta \\
=& R_{22}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

以上により，　全てのリッチテンソルが求められたので，ここでまとめておこう．

リッチテンソルのゼロでない成分

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{A'B'}{4B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{(\dot{B})^2}{4B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB}, \\
R_{01} &= \frac{\dot{B}}{rB}, \\
R_{11} &= \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB} + \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{(\dot{B})^2}{4AB} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2} - \frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2}, \\
R_{22} &= \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + 1, \\
R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

これで，リッチテンソルのすべての成分は求まったので，早速アインシュタイン方程式を解いてみよう．

0.1.4　バーコフの定理の証明

前項ではリッチテンソルを求めた．これより，アインシュタインテンソルを求めてしまえば，右辺を真空のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu} = 0$ とおいて，アインシュタイン方程式を立式できるのであった．しかし，ここで思い出してほしいのは，右辺が真空になる場合のアインシュタイン方程式である．右辺が真空になる場合のアインシュタイン方程式は，

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

と表され，扱っているスケールが宇宙全体レベルの大きなスケールでない場合には宇宙定数 Λ は小さすぎてほとんど影響がないから，実質上，解くべきアインシュタイン方程式は，

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

といたってシンプルになる わざわざ計算が難しくなる方を利用するメリットはあまりなさそうなので，今回はこちらを用いることにしよう．こちらの

形のアインシュタイン方程式を用いると，前項でリッチテンソルを求めたので　リッチテンソル= 0 とするだけですぐに真空中のアインシュタイン方程式を立式できる．アインシュタイン方程式の独立な成分は，見かけ上，

アインシュタイン方程式のゼロでない成分

$$R_{00} = -\frac{A'B'}{4B^2} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{(\dot{B})^2}{4B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4AB} + \frac{A''}{2B} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} = 0, \tag{4}$$

$$R_{01} = \frac{\dot{B}}{rB} = 0, \tag{5}$$

$$R_{11} = \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB} + \frac{\ddot{B}}{2A} - \frac{(\dot{B})^2}{4AB} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2} - \frac{A''}{2A} + \frac{(A')^2}{4A^2} = 0, \tag{6}$$

$$R_{22} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + 1 = 0, \tag{7}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta = 0, \tag{8}$$

の 5 つある．ここで (8) 式を見てみると，この式は，任意の θ で成り立つ式だから，これが成り立つためには，$R_{22} = 0$ が恒等的に成り立たねばならない．これは (7) 式の条件と全く一緒である．このためアインシュタイン方程式の独立な成分は 4 つになる．

次に，(5) 式より，

$$R_{01} = \frac{\dot{B}}{rB} = 0$$

がなりたつので，$\dot{B} = 0$ である．これは $B(t, r)$ が r のみの関数であることを意味するので，

$$B(r) \equiv B(t, r)$$

と置こう．

次に，R_{00} と R_{11} はよく似ているので，この 2 つからより単純な関係式

が得られないか考えてみると，まず，R_{00} を A で割ると，

$$\frac{R_{00}}{A}=-\frac{A'B'}{4AB^2}-\frac{\ddot{B}}{2AB}+\frac{(\dot{B})^2}{4AB^2}+\frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2B}+\frac{A''}{2AB}-\frac{(A')^2}{4A^2B}+\frac{A'}{rAB}=0$$

を得る．次に，R_{11} を B で割ると，

$$\frac{R_{11}}{B}=\frac{A'B'}{4AB^2}+\frac{B'}{rB^2}+\frac{\ddot{B}}{2AB}-\frac{(\dot{B})^2}{4AB^2}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{4A^2B}-\frac{A''}{2AB}+\frac{(A')^2}{4A^2B}=0$$

となる．この 2 つの式は，符号だけ異なる項が 6 つあるので，足すとそれらは全てゼロになってより簡単な式が得られる:

$$\frac{R_{00}}{A}+\frac{R_{11}}{B}=\frac{A'}{rAB}+\frac{B'}{rB^2}=0$$

この両辺に rAB^2 を掛けると，

$$A'B+AB'=0$$

が得られるが，これは，

$$(AB)'=0$$

に等しいので，これを解いて，

$$AB=C(t) \tag{9}$$

という，t のみの未知関数 $C(t)$ で $A=A(r,t)$ と $B=B(r)$ の積は表せることになる．ここで，世界間隔の式に立ち戻ってみると，

$$ds^2=-A(r,t)(dx^0)^2+B(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{10}$$

であったが，この式において，時空の歪みを引き起こすエネルギー運動量の分布が有限の領域にしかない場合を考えると，十分遠方 $r\to\infty$ では，極座標で表したミンコフスキー時空，

$$ds^2=-(dx^0)^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{11}$$

に一致してなくてはならない．これより，式 (10) と (11) を見比べると，任意の t で，

$$A(r,\,t) \overset{r\to\infty}{\to} 1,$$
$$B(r) \overset{r\to\infty}{\to} 1,$$

が成り立たねばならないことがわかる．この条件と，任意の $r,\,t$ で成り立つ条件式 (9) とを組み合わせると，任意の t で，

$$\lim_{r\to\infty} A(r,\,t)B(r) = 1\cdot 1 = 1$$

が成り立つはずだが，もともと $A(r,\,t)B(r) = C(t)$ は，右辺に変数 r を含まないので，t を固定すれば，任意の r で等しい値を持つ式だから，結局，

$$C(t) = A(r,\,t)B(r) = 1$$

が任意の $r,\,t$ で成り立つ．これより，$A(r,\,t)$ も r のみの関数で，

$$A(r,\,t) = \frac{1}{B(r)}$$

が成り立つことになる．したがって，世界間隔は，

$$ds^2 = -A(r)(dx^0)^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

となる．この時点で，計量は全て時間 t を含まず，また時間に関係する dx^0dr などの項も存在しないのだから，例え，球対称に分布したエネルギー運動量が動径方向に膨張・収縮等をしていても，外部の真空な領域の重力場は静的であることがわかる．

つぎに，このときできる時空の歪み＝時空の幾何学がどうなるのか，計算を続けてみよう．ここで考えるのは引き続きエネルギー運動量の分布していない真空の領域である．使用していない条件式は，(7) 式である．この式の B を $1/A$ として，計算をすると，

$$B' = \left(\frac{1}{A}\right)' = -\frac{A'}{A^2}$$

だから,

$$
\begin{aligned}
R_{22} =& \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + 1 \\
=& \left(-\frac{A'}{A^2}\right)\frac{r}{2}A^2 - \frac{rA'}{2} - A + 1 \\
=& -\frac{r}{2}A' - \frac{r}{2}A' - A + 1 \\
=& -rA' - A + 1 \\
=& -(rA)' + 1
\end{aligned}
$$

これがゼロに等しいから,

$$1 - (rA)' = 0$$

より，定数 r_g を用いて,

$$r - rA = r_g$$

すなわち,

$$A = 1 - \frac{r_g}{r}$$

と表されることになる．以上により，球対称にエネルギー運動量が分布した，天体の外側にできる重力場を表す世界間隔は,

シュヴァルツシルトの外部解

$$-(1 - r_g/r)(dx^0)^2 + \frac{1}{1 - r_g/r}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

と表されることがわかった．これをシュヴァルツシルトの外部解という.

0.1.5　シュヴァルツシルト半径

さて，シュヴァルツシルトの外部解のなかで定数 r_g がまだ未定だった．これは充分弱い（そして静的な）重力場の場合，ニュートンの万有引力の法

則を再現するとして決定されるべきである．我々は既に，弱い重力場におけるニュートン近似において，

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - \frac{2\phi_G}{c^2} \tag{12}$$

を得ている．今 $g_{00} = -(1 - r_g/r)$ であるから，これより

$$r_g = -\frac{2r\phi_G}{c^2} \tag{13}$$

が成り立つはずである．ただしここで，式 (12) が成り立つのが充分弱い重力場という条件があるため，式 (13) において $r \gg r_g$ における近似であるということに注意が必要であろう．この近似において，原点付近で球形に物質が均一に分布している場合の重力ポテンシャル ϕ_G は，原点に質量 M の質点を置いた場合に出来る重力ポテンシャルに等しく，

$$\phi_G = -\frac{GM}{r}$$

となる．従ってこれより，

シュヴァルツシルト半径

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{14}$$

が得られる．この r_g をシュヴァルツシルト半径と呼ぶ．

ここで次の二つの状況が考えられる:

■物質分布が半径 r_g より内側に限られる場合：　このときシュヴァルツシルトの外部解が適用できるのは物質分布のある外側全て，つまりシュヴァルツシルト半径 r_g の内側 (の物質分布が無い領域) まで対象となる．このときこの解は有名なブラックホール時空の解になる．

■物質分布が半径 r_g より外側まで分布している場合：　このとき解が適用できるのはシュヴァルツシルト半径 r_g より外側で物質分布が無い領域まで

であるが，このときはブラックホールにならない．実際の宇宙における天体としては惑星，恒星，白色矮星，中性子星など多数存在する．　(ただし自転や電荷などは再現されていない)