ビアンキの恒等式

リーマンテンソルに関する重要な恒等式としてビアンキの恒等式がある．それは次のような式である．

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma;\delta} + R^{\mu}{}_{\alpha\delta\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta;\beta} = 0 \tag{1}$$

或いは全く同じ意味であるが，

$$\nabla_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_{\gamma} R^{\mu}{}_{\alpha\delta\beta} + \nabla_{\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta} = 0 \tag{2}$$

と表される．この式の証明はテンソルに関する恒等式を証明する場合の常套手段だが，測地座標系を選んで確かめてみると簡単に証明できる．今，測地座標系では $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ が成り立っているのだから，共変微分がただの偏微分になる．空間が平坦だから当たり前なのだが，念のため具体的に計算してみると今，リーマンテンソルを通常の成分表示からテンソル空間の元として表してみると，

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma}$$

と表される．そこでこのテンソルを共変微分してやると，ライプニッツ則より，

$$\begin{aligned}
\nabla_{\delta}\left(R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma}\right) &= \left(\nabla_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\right) \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \left(\nabla_{\delta} \boldsymbol{e}_{\mu}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \\
&\quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \left(\nabla_{\delta} \boldsymbol{w}^{\alpha}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \left(\nabla_{\delta} \boldsymbol{w}^{\beta}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \\
&\quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \left(\nabla_{\delta} \boldsymbol{w}^{\gamma}\right) \\
&= \left(\partial_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\right) \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \left(\Gamma^{\nu}{}_{\mu\delta} \boldsymbol{e}_{\nu}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \\
&\quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \left(-\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\delta} \boldsymbol{w}^{\nu}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \left(-\Gamma^{\beta}{}_{\nu\delta} \boldsymbol{w}^{\nu}\right) \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma} \\
&\quad + R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \left(-\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\delta} \boldsymbol{w}^{\nu}\right) \\
&= \left(\partial_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\right) \boldsymbol{e}_{\mu} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{w}^{\beta} \otimes \boldsymbol{w}^{\gamma}
\end{aligned}$$

従ってこの計算を成分で表せば，

$$\nabla_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$$

となり共変微分がただの偏微分になることが分かる．そこでリーマンテンソルの定義に従って書き下してみると，

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_{\beta} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma} = \partial_{\beta} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\partial_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} &= \cancelto{1}{\partial_{\delta}\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}} - \cancelto{2}{\partial_{\delta}\partial_{\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}} \\
\partial_{\gamma} R^{\mu}{}_{\alpha\delta\beta} &= \cancelto{2}{\partial_{\gamma}\partial_{\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}} - \cancelto{3}{\partial_{\gamma}\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\delta}} \\
\partial_{\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta} &= \cancelto{3}{\partial_{\beta}\partial_{\gamma}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\delta}} - \cancelto{1}{\partial_{\beta}\partial_{\delta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}
\end{aligned}$$

より，

$$\partial_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + \partial_{\gamma} R^{\mu}{}_{\alpha\delta\beta} + \partial_{\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta} = 0$$

即ち，

$$\nabla_{\delta} R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_{\gamma} R^{\mu}{}_{\alpha\delta\beta} + \nabla_{\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\delta} = 0$$

が示された．なお，このテンソル式は既に説明したように座標系の選び方によらず成り立つ．