0.1　曲面の例：$\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた円筒について

ここまでの話について，具体的に $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた無限に長い円筒について考えよう．無限の長さを考えるのは，空間の “はし” が無い，という条件を満たすためである．さて，円筒は展開図を書けば円周方向に有限の広がりの長方形状になることはイメージできるだろう．するとこの円筒上に 2 点 P, Q をとって円筒に沿った最短距離，つまり P, Q を結ぶ測地線は円筒に描いた最短距離なので，当然展開図に広げて平面状にしたってそれは PQ を結ぶ最短距離のままである． いま，展開図は平面状になっているのだから，これは，PQ を結ぶ線分になっているはずである．P, Q の選び方は任意だから，これは円筒上の測地線がつねに平面 $\boldsymbol{R}^2$ に含まれる展開してできる無限に長い長方形領域における直線と等しいことを表しているはずである．いまから，このことを実際に確かめてみよう．

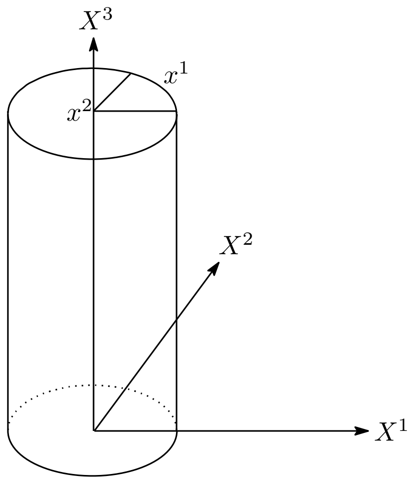

図 1: 円筒座標系

底となる円が半径 1 の円となる，X^3 軸に無限に伸びた円筒は,

$$
\begin{aligned}
X^1 &= \cos x^1, \\
X^2 &= \sin x^1, \\
X^3 &= x^2
\end{aligned}
$$

と表される（図 1）

これより，前節での計算方法を用いれば,

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -\sin x^1 \\ \cos x^1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

が得られることになる．したがって,

$$
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1,\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0,\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1
$$

が得られるので，微小距離は,

$$
dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \tag{1}
$$

が成り立つことになる．これは $x = x^1$, $y = x^2$ としたときの $\boldsymbol{R}^2$ の計量,

$$
dl^2 = dx^2 + dy^2 \tag{2}
$$

に等しい．

式 (1) と式 (2) をみると，これらは全く同じ式の見かけをしているため，これだけでは元の空間が円筒なのかそれとも平面なのか区別がつかない．しかし，円筒に住んでいる住人は，x^2 が一定となる方向，つまり x^1 方向に 2π 進むと元の地点に戻ってしまうことを確認できるので，各点でこれをやれば，自分たちの住んでいる空間が円筒状をしていることを知ることができるであろう．つまり，式の形こそ同じだが，これらはやはり別の空間と考えるべきである．この結果のように，一般に計量だけでは広い範囲での曲面の形状を決定できないことがわかる．これはすでに説明したとおり，曲面を伸び縮みしないように曲げたり広げたりしても，その曲面に描いた任意の曲線

の長さは変わらない，ということを意味する．今後我々が，計量が同じ形になったときに，したがって同じ空間である，といったら，この意味でのことなので注意しよう．なお，埋め込む空間が一意に決定できないだけでなく，埋め込んだ空間それ自体が，より高次元の空間に埋め込まれていると考えることもできるので，その点も頭においておこう．また，ここでの例は半径 1 の円筒を考えたが，一般の円筒でも計量の式の形は定数倍されるが $\boldsymbol{R}^2$ とおなじ計量を表している．というのも $\boldsymbol{R}^2$ の計量は座標軸を定数倍すると変わるが，それは座標軸の目盛りの振り方を変えただけで，平面の形状自体が変わったことを意味しないからである．