0.1　曲面とその座標系について

さて，準備が整ったところで早速，$\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元曲面 M 上に距離と計量を定義しよう．なお，ここでの議論はできるだけ一般的に議論するので，次元さえ上げれば任意の n 次元空間に埋め込まれた m 次元超曲面（$m \leq n$）に対して適用できることに注意しよう．

曲面の定義

通常の曲面（これを M とおく）とは $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた曲面のことである．したがって M は $\boldsymbol{R}^3$ の各成分を $(X, Y, Z) = (X^1, X^2, X^3)$ で表せば，

$$X = X^1 = F_{X^1}(*), Y = X^2 = F_{X^2}(*), Z = X^3 = F_{X^3}(*)$$

のようにいくつかのパラメータによる 3 つの関数 $F_{X^1}, F_{X^2}, F_{X^3}$ によって表せるだろう．いま 2 次元曲面とは曲面の各点で 2 つの異なる方向に広がりがあるから，このパラメータの個数は 2 個で書ける．これを x^1, x^2 としよう．すると曲面は一般に，

$\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた（2 次元）曲面の式

$$X^1 = F_{X^1}(x^1, x^2),$$
$$X^2 = F_{X^2}(x^1, x^2),$$
$$X^3 = F_{X^3}(x^1, x^2),$$

と表せることになる．また，もちろん 1 次元曲面，つまり曲線は

$\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた曲線の式

$$
\begin{aligned}
X^1 &= F_{X^1}(x^1), \\
X^2 &= F_{X^2}(x^1), \\
X^3 &= F_{X^3}(x^1),
\end{aligned}
$$

と書けることになる．これをみると，

- 座標軸 X^1, X^2, X^3, $\ldots$, の個数＝埋め込む空間の次元
- パラメータ x^1, x^2, $\ldots$, の個数＝曲面 M の次元

となることが分かる．ここではとりあえず $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元曲面について書くが，ここでの議論は一般の $\boldsymbol{R}^n$ に埋め込まれた m 次元超曲面 $(m \leq n)$ に拡張できる．

さて，こうして M は 2 つのパラメータ x^1, x^2 と座標成分 F_{X^1}, F_{X^2}, F_{X^3} によって定まるので，(x^1, x^2) を曲面 M の座標と呼ぼう．さてこのとき，

$$
\begin{aligned}
x^{1'} &= x^{1'}(x^1, x^2), \\
x^{2'} &= x^{2'}(x^1, x^2),
\end{aligned}
$$

あるいはまったく同じことだが，

$$
\begin{aligned}
x^1 &= x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\
x^2 &= x^2(x^{1'}, x^{2'})
\end{aligned}
$$

という変換を考えれば，

$$
\begin{aligned}
X^1 &= F_{X^1}(x^1, x^2) = F_{X^1}(x^1(x^{1'}, x^{2'}), x^2(x^{1'}, x^{2'})) \equiv F'_{X^1}(x^{1'}, x^{2'}) \\
X^2 &= F_{X^2}(x^1, x^2) = F_{X^2}(x^1(x^{1'}, x^{2'}), x^2(x^{1'}, x^{2'})) \equiv F'_{X^2}(x^{1'}, x^{2'}) \\
X^3 &= F_{X^3}(x^1, x^2) = F_{X^3}(x^1(x^{1'}, x^{2'}), x^2(x^{1'}, x^{2'})) \equiv F'_{X^3}(x^{1'}, x^{2'})
\end{aligned}
$$

より，$(F'_{X^1}, F'_{X^2}, F'_{X^3})$ も同じ曲面 M を表すので，$(x^{1'}, x^{2'})$ も M の座標と考えられる．ただし，　この座標変換は曲面全体で定義されるとは限らず，一般には局所的なものであることに注意しなければならない．

さてここで，F'_{X^I} たちは $F'_{X^I} = F_{X^I}(x^1(x^{1'}, x^{2'}), x^2(x^{1'}, x^{2'}))$ によって定義したものであるので，もし F_{X^I} に現れる x^1, x^2 を全て $x^{1'}, x^{2'}$ で表して x^1, x^2 をそれらで置き換えてしまえば，それが F'_{X^I} である．それ故 F_{X^I} も変数が $'$ 無し系から $'$ 有り系に移ると式の見かけが変わるということを理解しておけば，F'_{X^I} と F_{X^I} は本質的に同じ式を表していることになる．そこでこの F'_{X^I} も F_{X^I} で表すことにしよう．実は大学で習う偏微分のルールはこの記号上の同一視を用いて表したものになっているので，ここでもこのルールを適用するほうが都合が良い．

0.2　曲面上に距離を定義する

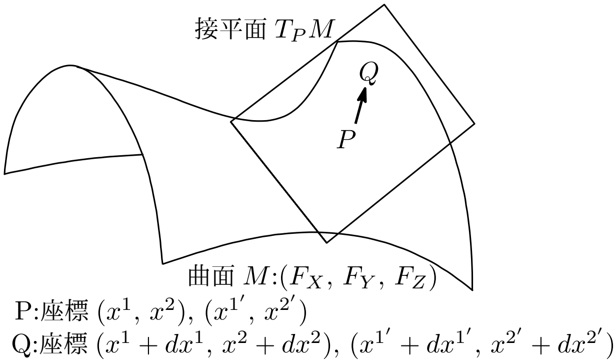

図 1: M 上の 2 点 PQ 間の距離

図のように曲面 M 上に 2 点 P, Q をとろう．曲面の各点での情報を得るため，点 Q は点 P の無限小近傍にとったものとする．するとこのとき，点 Q は，P の座標を (x^1, x^2) とするとき，微小量 dx^1, dx^2 によって，$(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ と表すことができる．このとき，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ は点 P での曲面 M の接平面 T_PM に含まれることに注意しよう．接平面は $\boldsymbol{R}^2$ だからベクトル空間である．このベクトル空間はもちろん点 P を原点とする空間である．いまからこの曲面上の 2 点間の差の距離を座標で表してみよ

う．まず，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ は

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} F_{X^1}(x^1+dx^1,\, x^2+dx^2) \\ F_{X^2}(x^1+dx^1,\, x^2+dx^2) \\ F_{X^3}(x^1+dx^1,\, x^2+dx^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{X^1}(x^1,\, x^2) \\ F_{X^2}(x^1,\, x^2) \\ F_{X^3}(x^1,\, x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dF_{X^1} \\ dF_{X^2} \\ dF_{X^3} \end{pmatrix}$$

と表せるので，全微分の公式より，

$$dF_{X^I} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} dx^i \qquad (I = 1,\, 2,\, 3) \tag{1}$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} dl^2 &\overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \\ &= \sum_{I=1}^{3} (dF_{X^I})^2 \\ &= \sum_{I=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} dx^i \right)^2 \\ &= \sum_{I=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} dx^i \right) \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^j} dx^j \right) \\ &= \sum_{I=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{I=1}^{3} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j \end{aligned}$$

となる．これより，

$$g_{ij}(x^1,\, x^2) \equiv \sum_{I=1}^{3} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^j} \tag{2}$$

と置けば，式，

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}(x^1,\, x^2) dx^i dx^j$$

は，この曲面上で通常の意味での距離を表す式となっている．一方，この式の平方根をどのように座標 (x^1_P, x^2_P) から (x^1_Q, x^2_Q) の間で積分しても当然 $\boldsymbol{R}^3$ の 2 点間の距離にはならない．この式の平方根の積分はあくまでもこの曲面 M に沿った曲線の長さを表すからである．そして M に沿って有限離れた P, Q を結ぶ最短の曲線がこの曲面 M の 2 点 P, Q を結ぶ測地線である．

0.3　接ベクトル空間の基底ベクトルを求める

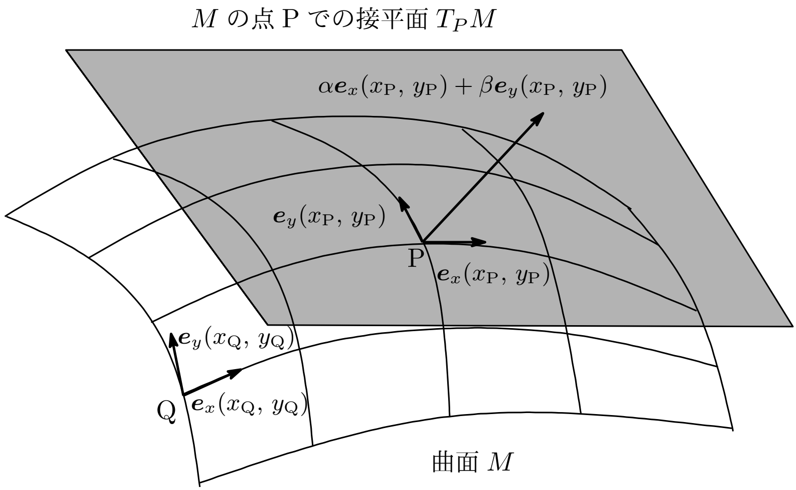

図 2: 曲面上に基底を選ぶ

さて，再び，曲面 M 上の点 P における無限小近傍を考えよう．これは局所的には点 P における M の接ベクトル空間になっているのであった．これを $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元曲面 M の場合にすると図のようになる（図 2）．ただし，図では 2 つの曲線座標を $x = x^1, y = x^2$ とし，点 P での接平面を T_PM とした．

この図をイメージとし，いまからこの接ベクトル空間 T_PM の基底を求めよう．

いま，式 (1) より，

$$dF_{X^I} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} dx^i \qquad (I = 1,\, 2,\, 3)$$

であった．このとき，無限小のベクトル

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \begin{pmatrix} dF^1 \\ dF^2 \\ dF^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

は当然接平面に含まれているベクトルである．そこでこのベクトルの dx^i たちを変化させて全てのベクトル（この場合 2 次元なので 2 つ）が線形独立になるようにとれば，それはこの接ベクトル空間の基底の資格があることになる．いまからこれを求めよう．

いま，座標を $(x^i) = (x^1,\, x^2)$ とすると，点 P での x^i_P とは x^i だけが変化する曲線のことである．イメージしやすいようにいえば，$\boldsymbol{R}^2$ の xy 軸に対して，x 軸とは原点を通り x のみが変化する軸，つまり直線 $y = 0$ のことであった．今考えているのは点 P 近傍だから，この例でいうならば直線 $y = y_P$ が点 $P : (x_P,\, y_P)$ 付近の x_P 軸になることになる．いま，x^i の点 P 付近での基底とは，点 P 付近の座標軸曲線 x^i だけが変化する曲線に沿ったベクトルなので，式 (3) において，　dx^i 以外をすべてゼロにおいた向きのベクトルである．これは任意の $j = 1,\, 2$ に対して，dx^j を $\delta^{ij} dx^j$ で置き換えたものに他ならない．したがって，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を座標成分 x^i 方向の基底とすれば，この基底に対して平行な（したがって基底の候補になる）

無限小のベクトルは,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^j} \delta^{ij} dx^j \\ \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^j} \delta^{ij} dx^j \\ \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^j} \delta^{ij} dx^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^i} dx^i \\ \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^i} dx^i \\ \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^i} dx^i \end{bmatrix}$$

となる．なお，通常添え字が上下に付けばアインシュタインの規約により和をとるのが普通なのであるが，最後の行は i で和をとってしまってはならない．この意味では $\sum$ で表せば，規約的に完璧なのだが，内容に反して複雑すぎなので，敢えて最後の行変形を付け加えた．これは無限小の基底なので，この基底を最も自然に一般化するには dx^i をすべて長さ 1 に置き換えたもの，すなわち，

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^j} \delta^{ij} \\ \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^j} \delta^{ij} \\ \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^j} \delta^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^i} \\ \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^i} \\ \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^i} \end{bmatrix}$$

としたものである．これがもっとも一般的な接ベクトル平面（一般には節ベクトル空間）の基底である．これをみると，x^i 方向の基底成分とは単に $\boldsymbol{F} = (F_{X^I})$ の成分を x^i 方向のみの変化量をとる，つまり x^i で偏微分すればよいことがわかる．念のため，基底同士の内積をとって，これが計量 (2)

に一致するか確かめてみよう．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j =& \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^i} \\ \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^i} \\ \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_{X^1}}{\partial x^j} \\ \dfrac{\partial F_{X^2}}{\partial x^j} \\ \dfrac{\partial F_{X^3}}{\partial x^j} \end{bmatrix} \\
=& \sum_{I=1} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^i} \frac{\partial F_{X^I}}{\partial x^j} \\
=& g_{ij}(x^1, x^2)
\end{aligned}
$$

となり，きちんと M の計量が得られたことがわかる (図 2).

0.3.1　任意の曲面の座標は局所的に斜交座標で書ける

さてここでこのやや抽象的に見える結果について，より具体的にはどういう意味があるのかみてみよう．既に見てきたように，基底ベクトルは式の形より一般には各点で異なり，x^1, x^2 の関数となっている．しかし，点 P の座標 (x_P^1, x_P^2) 付近では，それらは当然定ベクトルになっている．すると $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ たちは接平面（一般には接空間）の基底になっているので，これは一般には $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \neq 0$ であることより斜交基底になっていることになる．ここまで読めば，前節で何故斜交基底までしか一般化しなかったか，その理由が分かったことだろう．実は曲面上の任意の（曲線）座標系に対して，局所的には常に斜交座標になっているので斜交基底だけ扱えば，局所的にはそれで十分だったのである．したがって特に曲面として平面を選べば，ここでのやり方を用いて平面上にも任意の座標系と各点での基底をとることができることになる．