第 1 章

ユークリッド計量の入った空間と超曲面の幾何学

前章までで特殊相対論の概要はほぼすべて説明した．したがって続く章ではいよいよ本書の表題にもなっている一般相対論について説明するのであるが，一般相対論はよく知られているように曲がった 4 次元時空の幾何学で記述される理論である．そこでは，平らな時空ですら通常の距離とは異なる距離であるミンコフスキー計量などが現れるし，テンソルを導入する意味も突然説明されると分かりづらいかも知れない．またそもそも 4 次元の曲がった空間である時空をイメージすることも当然難しいことだろう．そこでこの章では，通常の距離であるユークリッド計量の入った平坦な 2 次元空間，つまり $\boldsymbol{R}^2$ から始めて，3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込まれた，通常の（2 次元）曲面について一般性をなるべく損なわないように議論しよう．そこでの議論の流れをみれば，より高次元に埋め込まれた超曲面の議論も自然に理解できるだろう．そののち，平坦な 4 次元空間であるミンコフスキー時空のミンコフスキー計量を考えることにしよう．この段階を踏むことによって，一般相対論で現れる 4 次元時空の幾何学についての議論がスムーズに理解されることと思う．

1.1　$\boldsymbol{R}^2$ の距離と計量の関係

ここでは話を簡単にするために，まず，通常の平坦な 2 次元平面 $\boldsymbol{R}^2$ に通常の内積と距離の入った空間構造を考える．“通常” と敢えて断った理由は，後々明らかになるであろう．

高校の数学では，$(x,\, y)$ 平面上に二つの点 $A : (a^x,\, a^y)$ 及び $B : (b^x,\, b^y)$ を取った場合，ベクトル $\boldsymbol{a} \equiv \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \equiv \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ との内積を演算記号 $\cdot$ で表すことにすると，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^x b^x + a^y b^y \tag{1.1}$$

とあらわされるのであった[*1]．高校数学では，全体的に理論体系のスマートさより，十分実際的でイメージがしやすいということを重視しているためか，一般的な議論をするにはあまり適当ではない定義を用いていたりする．そこでここでは高校数学程度の予備知識でより一般的に議論することを試みよう．

内積の定義 (1.1) において，ベクトル $\boldsymbol{e}_x \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に代入して計算をしてみると，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1, \\
&\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x = 0, \\
&\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1
\end{aligned}$$

が得られる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a^x \boldsymbol{e}_x + a^y \boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{b} &= b^x \boldsymbol{e}_x + b^y \boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}$$

[*1] 高校ではこの内積の値を位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{b}$ の間の角度を θ とするとき，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ となることを習ったことだろう．しかし，このことはより一般的な立場では逆にベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の間の角度の定義式と見るべきである．

と表されるから，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =&(a^x\boldsymbol{e}_x + a^y\boldsymbol{e}_y)\cdot(b^x\boldsymbol{e}_x + b^y\boldsymbol{e}_y)\\ =&a^xb^x\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x + a^xb^y\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y + a^yb^x\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_x + a^yb^y\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y\\ =&a^xb^x + a^yb^y\end{aligned}$$

と表されることがわかる．このことより，内積の定義 (1.1) は，実は基底を $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ に選んでベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を展開したときの係数たちによって定義されていることがわかるだろう．そこでこれを一般の定ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を基底に選んだときの内積に拡張しよう．

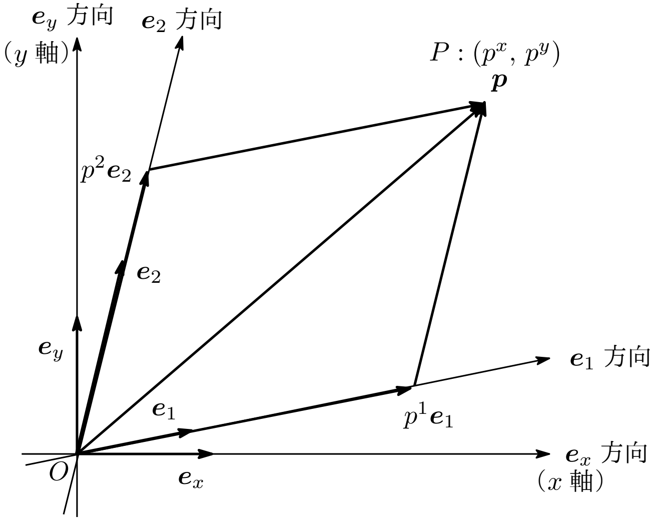

図 1.1: 斜交座標基底での位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ の表現

図において位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，$\boldsymbol{p}$ の座標が $P:(p^x,\, p^y)$ のとき，x 軸方向を向いた単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ と y 軸方向を向いた単位ベクトル $\boldsymbol{e}_y$ を用いて,

$$\boldsymbol{p} = p^x\boldsymbol{e}_x + p^y\boldsymbol{e}_y$$

と表すことができる．ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ とベクトル $\boldsymbol{e}_2$ が平行でないなら，つまり同一直線上にないなら，この同じベクトル $\boldsymbol{p}$ は，ベクトルの和に関する平行四辺形の法則により，

$$\boldsymbol{p} = p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2$$

のようにただ一通りの係数 (p^1, p^2) により表すことができるはずである．このとき，位置ベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$ の大きさをノルム記号を用いて $\|\boldsymbol{p}\|$，で表すと，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{p}\| =& \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2} \\
=& \sqrt{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} \\
=& \sqrt{(p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2)} \\
=& \sqrt{p^1p^1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + p^1p^2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + p^2p^1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 + p^2p^2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2} \\
=& \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p^ip^j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j} \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

のように任意の斜交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて表すことができることがわかる．このように，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の長さ $\|\boldsymbol{p}\|$ とは本来内積 $\sqrt{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}$ によって定義されるのが自然であり，したがってある同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ からなる，集まり $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対して内積が定義されると自動的に距離 (1.2) が定義できることがわかる．このとき，数の組 (p^1, p^2) は，斜交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で表したときの，座標になる．通常の意味での xy 座標は要するに基底として $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$ と選んだものに過ぎない．式 (1.2) をみると，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交しないときには，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$ の項が現れることがわかる．また，基底ベクトルの長さが 1 でないとき，当然 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i \neq 1$ である．このように考えると，すべての基底ベクトルの長さが 1 で，全ての基底ベクトルが互いに直交するように選ぶと非常に簡単に内積を表現できることがわかる．このように選んだ基底ベクトルの集まりを**正規直交基底**と呼ぶ．通常の xy 平面を考えるというのは，正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ によって成分を展開したものを座標成分として表すことに他ならない．

1.2　$\boldsymbol{R}^3$ の距離と計量の関係

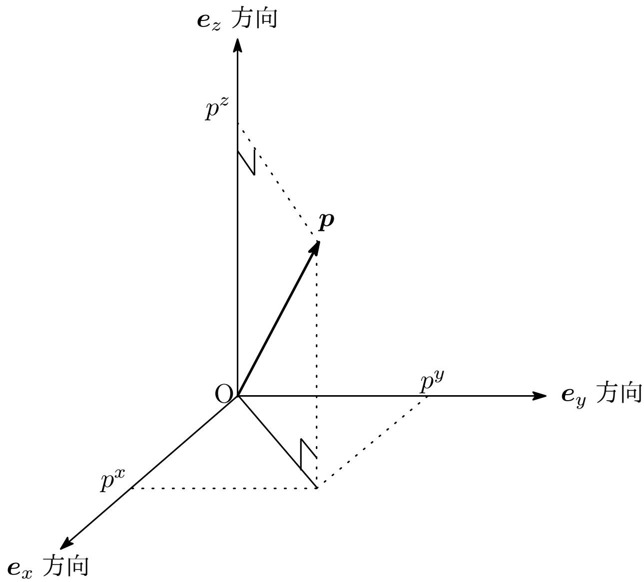

図 1.2: 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$

2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ の場合と同様にして，ベクトル $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = p^x \boldsymbol{e}_x + p^y \boldsymbol{e}_y + p^z \boldsymbol{e}_z$$

とあらわすこのとき，$\boldsymbol{p}$ の大きさ $\|\boldsymbol{p}\|$ は,

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2}$$

であるが，これは,

$$\sqrt{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}} = \sqrt{(p^x \boldsymbol{e}_x + p^y \boldsymbol{e}_y + p^z \boldsymbol{e}_z) \cdot (p^x \boldsymbol{e}_x + p^y \boldsymbol{e}_y + p^z \boldsymbol{e}_z)}$$

と書ける．$\boldsymbol{R}^2$ の場合と同様，任意のベクトルは任意の線形独立なベクトルで展開できるから，任意の同一平面内にないベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ によって，

$$\boldsymbol{p} = p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3$$

と表せる．上下に付く同じ添え字について $i = 1, 2, 3$ の範囲で和をとるアインシュタインの規約を用いれば，

$$\boldsymbol{p} = p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} p^i\boldsymbol{e}_i = p^i\boldsymbol{e}_i$$

と書くことができる．この表記法を用いると，

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} = \sqrt{(p^i\boldsymbol{e}_i)\cdot(p^j\boldsymbol{e}_j)} = \sqrt{p^ip^j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j}$$

と表すことができることになる．これは 2 次元の場合のベクトルの大きさの式，(1.2) の和を取る範囲を，次元が 1 つ上がった分だけ $i, j = 1, 2$ から $i, j = 1, 2, 3$ に変えただけである．

1.3　$\boldsymbol{R}^3$ の 2 点間の距離の計量による定義

前回用いた記号法を用いると，3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の任意の 2 点 P_1, P_2 の距離は，それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ とするとき，基底ベクトルとして選んだ同一平面内にない 3 つのベクトル，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ によって，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1\| &= \sqrt{(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)\cdot(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)} \\ &= \sqrt{\left[(p_2^i - p_1^i)\boldsymbol{e}_i\right]\cdot\left[(p_2^j - p_1^j)\boldsymbol{e}_j\right]} \\ &= \sqrt{(p_2^i - p_1^i)(p_2^j - p_1^j)\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j}\end{aligned}$$

と表すことができる．したがって，

$$\Delta p^i \equiv p_2^i - p_1^i,$$
$$\Delta\boldsymbol{p} \equiv \begin{pmatrix} \Delta p^1 \\ \Delta p^2 \\ \Delta p^3 \end{pmatrix}$$

と置くと，

$$\|\Delta\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\Delta\boldsymbol{p}\cdot\Delta\boldsymbol{p}} = \sqrt{\Delta p^i \Delta p^j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j}$$

と表せることになる．この式を見ると，内積 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$ たちが全て求まれば，$\boldsymbol{R}^3$ の任意の 2 点間の距離が求められることがわかる．そこで，

$$g_{ij} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

によって g_{ij} を定義すると，

$$\|\Delta\boldsymbol{p}\| = \sqrt{g_{ij}\Delta p^i \Delta p^j} \tag{1.3}$$

によって任意の 2 点間の距離が定まるので，この g_{ij} を計量（metric）と呼ぶ．特に，$\{\boldsymbol{e}_i\}$ として正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_x,\, \boldsymbol{e}_y,\, \boldsymbol{e}_z\}$ を採用すれば，

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

となるので，式 (1.3) は，

$$\|\Delta\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\delta_{ij}\Delta p^i \Delta p^j} = \sqrt{(\Delta p^1)^2 + (\Delta p^2)^2 + (\Delta p^3)^2}$$

と表されることになる．ベクトルの内積は基底ベクトルの選び方によらず同じ値をとるから，この式はルートの中身が常に非負実数，つまり，距離が常に非負実数であることを示している．一方相対性理論においては，微小の世界間隔 ds が距離の役割をするが，ds^2 は定義より負の値を取りうる．このことは距離の概念を一般化する際には距離の定義式として内積の平方根をと

らないほうが，扱いやすくなることを意味する．そこでここでも 2 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ 間の距離 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ を

$$\Delta l^2 \equiv \|\Delta\boldsymbol{x}\|^2 = \Delta\boldsymbol{x}\cdot\Delta\boldsymbol{x}$$

によって定義することにしよう．こうすると距離の定義は一般に，

$$\Delta l^2 \overset{\mathrm{def}}{=} g_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$$

とあらわすことができることになる．ここでこの式の右辺は線分の長さの 2 乗に対応するので左辺を英語で長さの意味を持つ length を用いて Δl^2 と置いた．