電磁場のエネルギー保存を表す式 (ポインティングの定理)

ここでは，マクスウェル方程式から，電磁場のエネルギー保存を表す方程式であるポインティングの定理を導く[*1].

0.1 マクスウェル方程式の紹介とポインティングの定理の導出

まずマクスウェル方程式とは次の 4 本のベクトル方程式であった:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2b}$$

ここで今回用いるのは，(1b) と (2b) である．まず，ベクトル解析の公式より，

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{1}$$

が成り立っているので，(1b) 両辺に左から $\boldsymbol{H}\cdot$ を作用させると，

$$\boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

続いて，(2b) 両辺に左から $\boldsymbol{E}\cdot$ を作用させると，

$$\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3}$$

したがって，(2) 式から (3) 式を引いたものは (1) 式の右辺に等しいから，

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4}$$

ここで線型な一様等方媒質中では，誘電率 ε と通磁率 μ はどこでも一緒だから，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5}$$

という関係があるから，

$$\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \mu \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) \tag{6}$$

同様にして，

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2\right) \tag{7}$$

[*1] ポインティング (Poynting) は人名であって，何かをポイントするという意味ではない.

が得られるから，これらを式 (4) の右辺に代入して，

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2\right) \tag{8}$$

つまり

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{9}$$

が成り立つ．この式を体積 V 中で積分すると，

$$\iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) d^3v + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) d^3v + \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d^3v = 0 \tag{10}$$

この式の初項にガウスの発散定理を用いると，

$$\iint_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} d^2s + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) d^3v + \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d^3v = 0 \tag{11}$$

2 項目の積分と微分は入れ替えられて，空間積分の結果変数は t のみとなるから，偏微分は常微分になる．したがって，

$$\iint_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} d^2s + \frac{d}{dt}\iiint_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) d^3v + \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d^3v = 0 \tag{12}$$

が成り立つ．そこで，

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{13}$$

と置いて，

$$\iint_S \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} d^2s = -\frac{d}{dt}\iiint_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) d^3v - \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d^3v \tag{14}$$

をポインティングの定理 (の積分形) と呼び，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ をポインティングベクトルと呼ぶ.

0.2 エネルギーの流れについて

さて，得られた式 (14) がどのような物理的意味があるか考えてみよう．式 (14) の右辺第 2 項に含まれる電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，速度 $\boldsymbol{v}$ で移動する電荷密度を ρ とすると，$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ と表せる．したがって，電場が微小時間 dt に単位体積中の電荷 ρ に及ぼす仕事 dW は，

$$dW = \rho \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \rho \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{E} dt = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} dt = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} dt \tag{15}$$

で与えられる．したがって，

$$\int_V \frac{dW}{dt} dv = \int_V \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} dv \tag{16}$$

であるので，この積分の次元は単位時間当たりの仕事 [J/s] となる．式が複数の項の和で表せるとき，その各項は全て次元が等しいはずだから，式 (14) の各項の次元は全て [J/s] となっている[*2]．つまりこの式は各エネ

[*2] 心配なら各自調べてみると良い

ルギーの時間変化の総量が等しいことを表す式である．ここで式 (14) 左辺は，ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ が領域 V から単位時間内に流出するエネルギーを表し，右辺第 2 項は，電場が電荷に与えたエネルギーであるから，右辺第 1 項は，領域 V 中の電磁場のエネルギーと考えるのが自然であろう．実際，ポインティングベクトルの流出がなく，電流がない場合,

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) dv = 0 \tag{17}$$

より，電磁場のエネルギーはそれ自身で保存されることが分かる．これより領域 V 中の電磁場のエネルギーは,

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2\right) dv = 0 \tag{18}$$

で表されることが分かった.