波動方程式の導出と平面波解

波動方程式の導出

ここでは，よく知られた結果であるが，電荷 $\rho(\boldsymbol{r},\, t)$ も電流 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},\, t)$ も存在しない真空の空間を伝わる電磁波の満たす波動方程式を導く．

真空中のマックスウェル方程式は，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

である．まず最初に，式 (2) に左から $\nabla\times$ を作用させると，

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

ここでベクトル解析の公式，$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$ を用いると，

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

ここで，式 (3) を用いると，

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

次に，式 (4) の両辺を t で偏微分して，

$$\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

これより，

$$\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{9}$$

が得られるから，これを式 (8) に代入して，

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{10}$$

ここで $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ だから，これを入れて全体の符号を入れ替えると，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

これが変動する電場が満たすべき，波動方程式である．

平面波の解

波動方程式 (11) の平面波解を求めよう．ここで電場は x 軸方向に偏光しているものとすると，

$$E_y = E_z = 0, \tag{12}$$

ここで，式 (3) より，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

より，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

が得られるので，これは x 軸方向を向いた電場は x 軸方向に進むことができないことを示しているので，これは電磁波が横波であることを意味する．そこで $+z$ 軸方向にこの波が進むと仮定すると，波動方程式 (11) は，

$$\frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{15}$$

と表され，この式において y 軸方向の空間依存性が無いから，

$$\frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(z,\,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

が得られる．これは簡単に解くことができて，一般解は，

$$E_x(z,\,t) = F(z-ct) + G(z+ct) \tag{17}$$

このうち $F(z-ct)$ は x 軸正の向きに進む波の解で $G(z+ct)$ は負の方向に進む解である．いま，z 軸正の方向に進む解のみを考えているのであるから，一般解は，

$$E_x(z,\,t) = F(z-ct) \tag{18}$$

が求める解となる．ここで一様に振動する解を考えると，

$$E_x(z,\,t) = E_0\cos\left[\frac{\omega}{c}(z-ct)+\delta\right] = E_0\cos(kz-\omega t+\delta) \tag{19}$$

が解となる．ただし，$k = \dfrac{\omega}{c}$ とする．

さてこの解は，cos を指数関数で表すと，次のように表せる．

$$E_x(z,\,t) = \frac{E_0}{2}\left[e^{i(kz-\omega t+\delta)} + e^{-i(kz-\omega t+\delta)}\right] \tag{20}$$

この解はさらに，

$$E_x(z,\,t) = \frac{E_0}{2}e^{i\delta}e^{i(kz-\omega t)} + \frac{E_0}{2}e^{-i\delta}e^{-i(kz-\omega t+\delta)} \tag{21}$$

これより，いま複素数 E を，

$$E \equiv \frac{E_0}{2}e^{i\delta} \tag{22}$$

とおけば，

$$E_x(z,\,t) = Ee^{i(kz-\omega t)} + E^* e^{-i(kz-\omega t)} \tag{23}$$

これが，x 軸方向に偏光し，z 軸方向正の向きに進む電磁波の振動解である．