代表的な静磁場の公式をマクスウェル方程式から導く

電磁気学で得られる全ての公式はマクスウェル方程式 (とローレンツ力の式) から得られます．ここでは簡単ですが特に代表的な静磁場の公式をマクスウェル方程式から導いてみます．

マクスウェル方程式と時間変化しない場合のマクスウェル方程式

まずマクスウェル方程式を簡単に眺めてみよう:

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 : (1\mathrm{a})$	磁束保存の式
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} : (1\mathrm{b})$	ファラデー・マクスウェルの式
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho : (2\mathrm{a})$	ガウス・マクスウェルの式
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} : (2\mathrm{b})$	アンペール・マクスウェルの式

これから考えることは真空中に電荷が分布している状況を考えるので誘電率や通磁率は真空のものでよい．したがって，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2}$$

が成り立つとしてよい．ここで ε_0 は真空の誘電率，μ_0 は真空の通磁率である．

我々がこれから考えるのは，時間変化しない磁場 (=静磁場) であるので，マクスウェル方程式の中の時間変化を表す項，つまり時間 t での偏微分の項はすべて 0 であるとしてよい．するとマクスウェル方程式は次の形になる:

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 : (1\mathrm{a})$	磁束保存の式
$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 : (1\mathrm{b})$	ファラデー・マクスウェルの式
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho : (2\mathrm{a})$	ガウス・マクスウェルの式
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} : (2\mathrm{b})$	アンペール・マクスウェルの式

さてここまで，やや冗長気味にマクスウェル方程式を紹介してきたが，今回我々の目標とするのは

1. アンペールの法則
2. ビオ・サバールの法則

としよう．

アンペールの法則の導出

式 (2b) の両辺に μ_0 を掛けると，式 (2) より，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{3}$$

が得られるので，直線電流を含むような閉曲線を境界とする任意の曲面 S に対して，

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{n} ds = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{4}$$

ここでこの式の左辺についてストークスの定理より，

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{n} ds = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{5}$$

が成り立ち，これは直線電流を中心に持ち，半径 r の垂直な円を閉曲線とした場合，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B \qquad (B \equiv \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}) \tag{6}$$

が成り立つ．一方右辺は，閉曲面を横断する電流の大きさを I とすれば，

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} ds = \mu_0 I \tag{7}$$

が成り立つ．以上より，

$$2\pi r B = \mu_0 I \tag{8}$$

なので，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{9}$$

が得られ，これはアンペールの法則に他ならない．

ビオ・サバールの法則の導出

まず求めたいビオ・サバールの法則とは次のものである:

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{x}' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \tag{10}$$

ここでの証明にはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ にクーロンゲージ条件を課して解くことにする．まず，(1a) より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11}$$

であるが，これは数学的にはあるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在して，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{12}$$

であることに他ならない．つまりベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって条件 (1a) が消去できたことになる．次にこれと (1b) により，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{13}$$

よって，条件 (1b) は，

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = \boldsymbol{0} \tag{14}$$

と表せるが，これは，数学的にはあるスカラーポテンシャル ϕ が存在して，

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \tag{15}$$

であることに他ならない．これはつまり，スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって条件 (1a), (1b) が消去できたことになる．(2a), (2b) に"見かけ上"現れる $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{B}$ を消去するには，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{17}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{19}$$

を使用して，(2a) は，

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \left(\nabla\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \Delta\phi + \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{20}$$

より，

$$\Delta\phi + \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} : (2\mathrm{a}') \tag{21}$$

(2b) は，まず左辺は，

$$\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} \tag{22}$$

一方，右辺は，

$$\mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\left[-\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right] \tag{23}$$

となるから，

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\left[-\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right] \tag{24}$$

より両辺合わせて，

$$\nabla\left[\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] - \Delta \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{25}$$

だから，

$$\nabla\left[\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial\left(\frac{\phi}{c}\right)}{c\partial t}\right] - \Box \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} : (2\mathrm{b}') \tag{26}$$

と表せることが分かった．

ゲージ変換

このようにマクスウェル方程式はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって (2a') と (2b') にまとめられるが，実はこのスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの選び方は 1 通りではない，実際，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}_0 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi_0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t} \tag{28}$$

のとき，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi \tag{29}$$

$$\phi = \phi_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{30}$$

とおくと,

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi) = \nabla \times \boldsymbol{A}_0 + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{B} \tag{31}$$

また,

$$-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla\left(\phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi) = -\nabla\phi_0 + \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t} - \frac{\partial\nabla\chi}{\partial t} = -\nabla\phi_0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}_0}{\partial t} = \boldsymbol{E} \tag{32}$$

より, $\boldsymbol{A}_0 \mapsto \boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi$, $\phi_0 \mapsto \phi_0 - \dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ としても, (1a), (1b) を満たすポテンシャルとなる. この変換をゲージ変換と呼ぶ.

クーロンゲージ条件

$\boldsymbol{A}_0$ から $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi$ へのゲージ変換を行ったとき,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}_0 + \Delta\chi \tag{33}$$

が成り立つから, 特に

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0 \tag{34}$$

となるように χ を選べば, いつでも

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{35}$$

になるようにゲージ変換できる. これをクーロンゲージ条件と呼ぶ. 具体的には任意の与えられた $\boldsymbol{A}_0$ に対して, ポアソン方程式 (34) の解として,

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla_{\boldsymbol{x}'} \cdot \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' \tag{36}$$

が選べるので, このゲージ変換 $\boldsymbol{A}_0 \mapsto \boldsymbol{A}_0 + \nabla\chi$, $\phi_0 \mapsto \phi_0 - \dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ によってクーロンゲージ条件 $\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす.

さて, このクーロンゲージ条件を満たすスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いると, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ を (2a$'$), (2b$'$) に代入して,

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} : (2\mathrm{a}'') \tag{37}$$

$$\nabla\frac{\partial\left(\dfrac{\phi}{c}\right)}{c\partial t} - \Box\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} : (2\mathrm{b}'') \tag{38}$$

が成り立つ.

ここでいま考えているのは静電場・静磁場の場合だから, 時間微分に関する項は全て 0 になってしまうから, (2b$''$) はさらに簡単に,

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j} : (2\mathrm{b}''') \tag{39}$$

となりかなり簡単になることが分かる. ポアソン方程式 (2b$'''$) を境界条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ のもとで解くと,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' \tag{40}$$

が得られる．実際,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3\boldsymbol{x}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla_{\boldsymbol{x}'}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' \qquad (41)
\end{aligned}
$$

となることが，成分計算をすれば分かるが，いま，$x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) &= \sum_{k=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{j^k(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) \\
&= \sum_{k=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)j^k(\boldsymbol{x}') + \sum_{k=1,2,3}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\frac{\partial}{\partial x'^k}j^k(\boldsymbol{x}') \\
&= \nabla_{\boldsymbol{x}'}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') + \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \qquad (42)
\end{aligned}
$$

より,

$$
\nabla_{\boldsymbol{x}'}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') = \nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) - \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \qquad (43)
$$

なので，式 (43) は,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla_{\boldsymbol{x}'}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3\boldsymbol{x}' - \iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}'\right] \qquad (44)
\end{aligned}
$$

となるが，この式の右辺の第 1 項目は，ガウスの発散定理より,

$$
\iiint_{-\infty}^{\infty}\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3\boldsymbol{x}' = \iint_S\nabla_{\boldsymbol{x}'}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\cdot\boldsymbol{n}ds \qquad (45)
$$

となるが，右辺の単連結閉曲面 S は有限領域内にのみ電流が存在する場合，それら全てを含むように選ばれなければ等号が成立しないが，このとき，閉曲面 S 上を流れる電流が 0 となるため，この項は消える．また右辺第 2 項目は，(2b) の左側から $\nabla\cdot$ を作用させることより,

$$
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) = \nabla\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{D} \qquad (46)
$$

となるが，左辺は回転の発散なので 0 となる．また右辺第 2 項目は定常状態の問題を扱っているのであるから，これも 0 となる．したがって,

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \qquad (47)
$$

が得られるので，(49) 式第 2 項目もやはり 0 となる．以上により，式変形を逆にたどっていくと,

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (48)
$$

が示せたことになり，これはつまり，(40) 式が境界条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ のもとで，ポアソン方程式 $\delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}$ の解となっていることを意味する．

そこで，これを $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\boldsymbol{x}} \times \left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) d^3\boldsymbol{x}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') d^3\boldsymbol{x}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') d^3\boldsymbol{x}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}' \qquad (49)
\end{aligned}$$

が得られる．ここで電流 I が細い線ででき閉曲線 C 上のみを流れるとき，この公式は,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\boldsymbol{x}' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \qquad (50)$$

となる．これはビオサバールの法則の積分形である．従って微分形は,

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{x}' \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}' \qquad (51)$$

となる．これが我々の求めたい結果であった.