## 0.1　ゲージ変換

マクスウェル方程式をポテンシャルで表す

マクスウェル方程式,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4}$$

は，条件 (1) と (2) によって，適当なベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル $\boldsymbol{\phi}$ を用いて,

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

と表せて，これにより，条件 (1) と (2) は自動的に満たされる．真空中で成り立つ関係式,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

の助けによって，条件 (3) と (4) は，$\boldsymbol{A}$ と $\phi$ のみを含む条件式,

$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{j} \tag{6}$$

として表すことができる．したがって，$\boldsymbol{A}$ と $\phi$ の不定性はあるが，実質上，マクスウェル方程式は，(5) と (6) の 2 つにまとめることができることになる．

ゲージ変換

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ のとき，任意の $\chi$ に対して，

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

となるから，

$$\boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A} + \nabla\chi$$

とすれば，

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}'$$

とできるので，このとき，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla\chi) - \nabla\phi' = -\nabla(\phi' + \frac{\partial\chi}{\partial t}) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

一方，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

が成り立つのであったから，この両者を比較して，

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

と取れば良いことがわかる，この変換，

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\chi,$$
$$\phi \to \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

をゲージ変換と呼ぶ.