代表的な静電場の公式をマクスウェル方程式から導く

電磁気学で得られる全ての公式はマクスウェル方程式 (とローレンツ力の式) から得られます．ここでは簡単ですが特に代表的な静電場の公式をマクスウェル方程式から導いてみます.

マクスウェル方程式と時間変化しない場合のマクスウェル方程式

まずマクスウェル方程式を簡単に眺めてみよう:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 : (1a) \qquad \text{磁束保存の式}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} : (1b) \qquad \text{ファラデー・マクスウェルの式}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho : (2a) \qquad \text{ガウス・マクスウェルの式}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} : (2b) \qquad \text{アンペール・マクスウェルの式}$$

これから考えることは真空中に電荷が分布している状況を考えるので誘電率や通磁率は真空のものでよい．したがって,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2}$$

が成り立つとしてよい．ここで ε_0 は真空の誘電率, μ_0 は真空の通磁率である.

我々がこれから考えるのは，時間変化しない電場 (=静電場) であるので，マクスウェル方程式の中の時間変化を表す項，つまり時間 t での偏微分の項はすべて 0 であるとしてよい．するとマクスウェル方程式は次の形になる:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 : (1a) \qquad \text{磁束保存の式}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 : (1b) \qquad \text{ファラデー・マクスウェルの式}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho : (2a) \qquad \text{ガウス・マクスウェルの式}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} : (2b) \qquad \text{アンペール・マクスウェルの式}$$

さてここまで，やや冗長気味にマクスウェル方程式を紹介してきたが，今回我々の目標とするのは

1. 球対称に電荷が分布しているときの球の外側での静電場
2. 直線状に等密度で電荷が分布しているときの静電場
3. 平面上に等密度で電荷が分布しているときの静電場

としよう．すると必要となる式はただ一つ,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{3}$$

のみとなる．ここで (1) を用いると，(3) 式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

となる．ここで (4) 式をある適当な閉曲面 S で覆われた領域 V について和をとると,

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv \tag{5}$$

ここでガウスの定理を用いると,

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{6}$$

が成り立つので，結局,

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv \tag{7}$$

が成り立つことになる．この式を元に 1. から 3. について具体的に計算してみよう.

球対称に電荷が分布しているときの球の外側での静電場

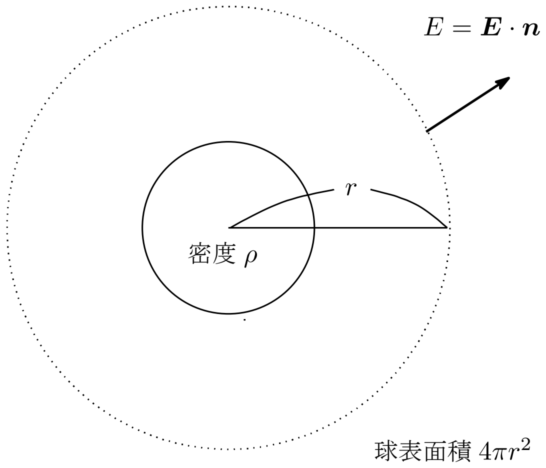

図 1: 球対称に電荷が分布しているときの球の外側での静電場

(7) 式において，半径 a の球内に密度 ρ で電荷が分布しているとしよう．いま考える静電場は球の外側だけだから，a より大きい半径 r の球で周りを囲みこの閉曲面を S，閉曲面 S で覆われた領域を V としよう．すると静電場は球対称であるから,

$$E \equiv \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \tag{8}$$

は一定値をとる．するとこの閉曲面の面積は $4\pi r^2$ だから,

$$4\pi r^2 E = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv \tag{9}$$

より,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V \rho dv \tag{10}$$

が得られる．このとき半径 a の球はいくらでも小さくてかまわないから，特に $a = 0$ の点に点電荷 Q があるものとしてもこの式は成り立つ．この場合,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{11}$$

が成り立つ．したがって，点電荷から r 離れたところに電荷 Q の点電荷を置くと点電荷両者に働く力は,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \tag{12}$$

これはクーロンの法則に他ならない.

直線状に等密度で電荷が分布しているときの静電場

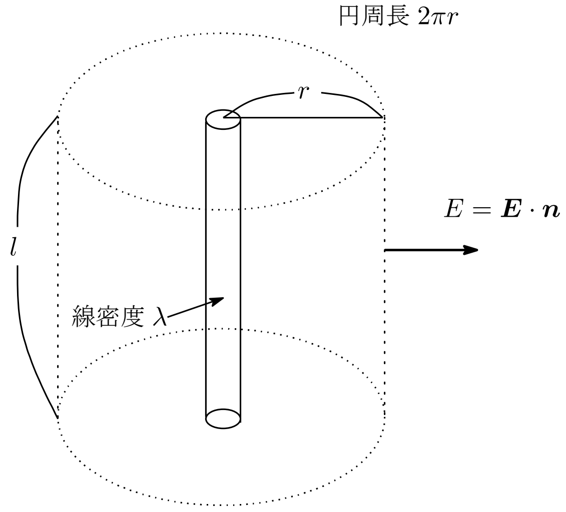

図 2: 球対称に電荷が分布しているときの球の外側での静電場

(7) 式において無限の長さの直線状に線密度 λ で電荷が分布しているものとしよう．この直線を中心とし，半径 r で長さが l の円柱領域を考えよう．対称性から発生する静電場は，この直線に対して垂直な成分のみをもち，それらは半径 r の点なら等しい大きさを持つ．したがって，

$$E \equiv \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \tag{13}$$

とすれば，左辺は，

$$2\pi r l E = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv \tag{14}$$

が成り立つ．一方右辺は，

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda l \tag{15}$$

が成り立つ．したがって，

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \tag{16}$$

が成り立つことが分かった．

平面上に等密度で電荷が分布しているときの静電場

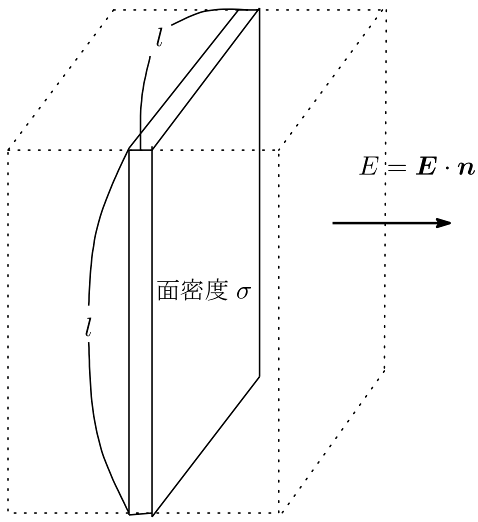

図 3: 球対称に電荷が分布しているときの球の外側での静電場

(7) 式においてこの平面から r 離れたところに面をもつたてよこ l の直方体領域を V としよう．すると対称性から発生する静電場はこの平面に垂直な成分しか持たず，したがって，

$$E \equiv \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \tag{17}$$

としてよい．この平面には裏面と表面があることより (7) 式の左辺は，

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} ds = 2l^2 E \tag{18}$$

となる．一方右辺は，面密度 σ とすれば，

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma l^2 \tag{19}$$

となるので，

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{20}$$

となる．

平行版コンデンサーの静電容量

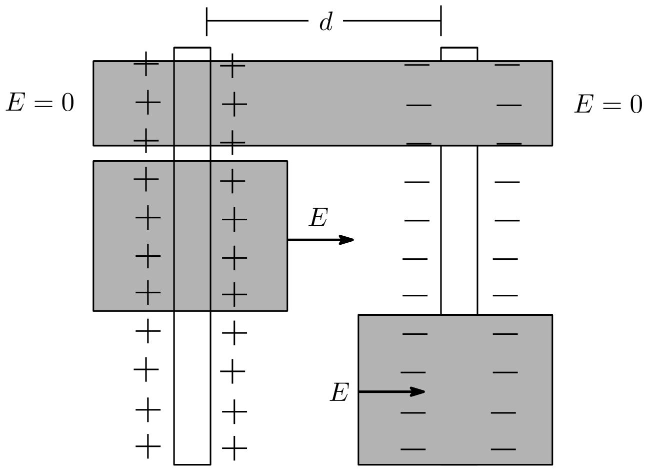

図 4: 平行版コンデンサーの電荷分布

(無限に広い) 平面上に等密度で電荷が分布しているときの静電場の作る電場の問題は，応用上重要な平行板コンデンサーの問題になる．図のように電荷密度 σ で向き合った平行版コンデンサーを考える．いま簡単のため平行板は無限の広さだと想定して静電場を求めるが，実際上は平行板の極板間隔 d が平行板の面積 S より充分小さければほぼ無限として求めた場合と一致するだろう．このとき，それぞれの極板間において

1. 極板間内部は左側の極板が作る $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ の電場と
   右側の極板が作る $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$ の電場の合成となるため内部の電場は右向きに $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ となる．
2. 極板の外側は右側も左側も打ち消しあうので充分遠方で外部電場は 0 になる．

となる．ただし，一般の誘電体を考え $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ とした．すると，極板の面積を S とするとき，極板間に溜まる電荷は，

$$Q = S\sigma \tag{21}$$

によって与えられる．一方，極板の間隔を d とすれば，電位差 V は,

$$V = Ed \tag{22}$$

によって与えられる．したがって，極板間では,

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon}d \tag{23}$$

となるので,

$$Q = S\sigma = \frac{\varepsilon S}{d} \cdot \frac{\sigma d}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon S}{d}V \equiv CV \tag{24}$$

より，このコンデンサーの静電容量 C は,

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \tag{25}$$

によって与えられる．これより平行板コンデンサーの容量を増やすには極板の面積 S を大きくして，極板の間隔 d を小さくして，さらに誘電体として誘電率 ε が大きいものを選べばよいことが分かる．