クーロンの法則から静電場の公式を導く

クーロンの法則は高校物理でも習うものですが，これより幾つかの静電場の公式を導くことができます．それらは，当然マクスウェル方程式からも導くことができますが，クーロンの法則から導くことも教育的には宜しいかと思います．そこでここではクーロンの法則からこれら代表的な静電場の公式を導くことにします．

高校物理で習うクーロンの法則とは，次のものであった:

長さ r 離れた電荷 q と Q の間に働く力の大きさは，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \tag{1}$$

で表され，その向きは，電荷の符号が同符号なら反発し，異符号なら引き合う．そこでこの式を大きさだけでなく，力の働く向きまで含めて表すには，$\boldsymbol{r}$ を電荷 q の点電荷の位置ベクトル，$\boldsymbol{r}'$ を電荷 Q の点電荷の位置ベクトルとすると，電荷 q に働く力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{2}$$

で表されることになる．ここで，単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ が電荷 q の点電荷に働く力の向きのベクトルであることを用いた．この式を複数の点電荷 Q_i がある場合の点電荷 q に働く力に拡張するには，単にそれらの和をとればよいから，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i Q_i\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{3}$$

となる．したがって，これら Q_i が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i Q_i\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{4}$$

によって表せる．これを電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ の場合について考えるには単に和 $\sum$ を積分 $\int$ に換えればよいから，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r \tag{5}$$

クーロンの法則は，一般にこの式 (5) によって表すことができる．そこでこの式によって，次の 1. 点電荷の場合，2. 直線電荷の場合，3. 平面電荷の場合についてその電場の大きさを表す式を求めよう．

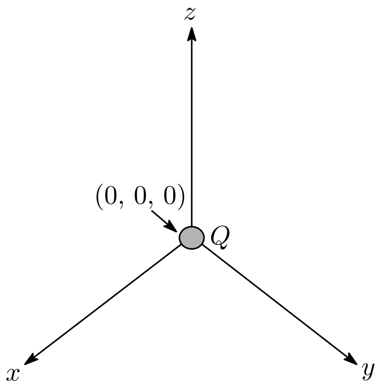

図 1: 点電荷

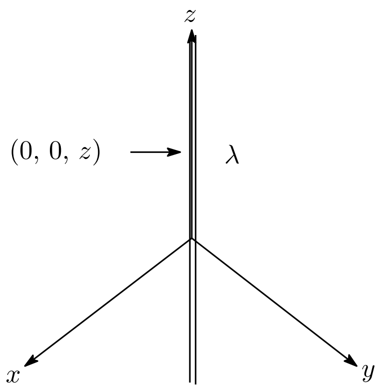

図 2: 直線電荷

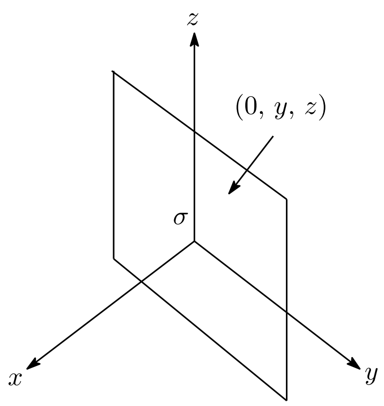

図 3: 平面電荷

1　点電荷の場合

原点に置いた点電荷 Q を空間電荷密度 ρ で表すと，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

となるので，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}Q\delta^3(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{7}$$

より，電場の大きさは

$$E(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{8}$$

となる．

2　直線電荷の場合

z 軸上に均一に線密度 λ で電荷が分布しているとき，空間電荷密度 ρ は，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y) \tag{9}$$

と表されるので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}d^3r \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dx'dy'dz'\lambda\delta(x')\delta(y')\frac{(x-x',\, y-y',\, z-z')}{(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dy'dz'\delta(y')\frac{(x,\, y-y',\, z-z')}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{(x,\, y,\, z-z')}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2})^3}
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，この積分の z 成分をみてみると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z'}\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(z-z') \\ &= -\frac{z-z'}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2})^3}\end{aligned} \tag{11}$$

より，

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{z-z'}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2})^3} = \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{12}$$

一方，

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2})^3} \tag{13}$$

は，$z'-z=\sqrt{x^2+y^2}\tan\theta$ と置くと，

$$dz' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\theta}d\theta \tag{14}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\theta} \tag{15}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2})^3} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{x^2+y^2}d\theta \\ &= \left[\frac{\sin\theta}{x^2+y^2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{x^2+y^2}\end{aligned} \tag{16}$$

が得られるから，

$$\boldsymbol{E}(x,\,y\,z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{x^2+y^2}(x,\,y,\,0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(x,\,y,\,0)}{x^2+y^2} \tag{17}$$

これより $R\equiv\sqrt{x^2+y^2}$ とおき，$(x,\,y,\,z)$ での電場の強さを $E(R)$ とすれば，

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \tag{18}$$

が得られる．

3　平面電荷の場合

$z=0$，すなわち $x-y$ 平面上に均一な電荷密度 σ で電荷が分布しているとき，空間電荷密度 ρ は，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\delta(x) \tag{19}$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dy'dz'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\sigma\delta(x')\frac{(x-x',\,y-y',\,z-z')}{(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3}\\ &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dy'dz'\frac{(x,\,y-y',\,z-z')}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3}\end{aligned} \tag{20}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right) = -\frac{y-y'}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} \tag{21}$$

より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}dy'\frac{y-y'}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} = \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{22}$$

全く同様に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{z-z'}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} = \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{23}$$

一方，

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{1}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} \tag{24}$$

は，変数変換 $z'-z=\sqrt{x^2+(y-y')^2}\tan\theta$ によって，

$$dz' = \frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2}}{\cos^2\theta}d\theta d\theta \tag{25}$$

$$\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \sqrt{x^2+(y-y')^2}\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2}}{\cos\theta}d\theta \tag{26}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\frac{1}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2})^3} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{(\sqrt{x^2+(y-y')^2})^3}\frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2}}{\cos^2\theta}d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{x^2+(y-y')^2}d\theta\\ &= \left[\frac{\sin\theta}{x^2+(y-y')^2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2}{x^2+(y-y')^2}\end{aligned} \tag{27}$$

これを y' で積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{2}{x^2 + (y - y')^2} \tag{28}$$

だから，変数変換 $y' - y = x \tan\varphi$ によって，

$$dy' = \frac{x}{\cos^2\varphi} d\varphi \tag{29}$$

$$x^2 + (y - y')^2 = x^2(1 + \tan^2\varphi) = \frac{x^2}{\cos^2\varphi} \tag{30}$$

となるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{2}{x^2 + (y - y')^2} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos^2\varphi} d\varphi = \left[\frac{2}{x} \cdot \varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{x} \tag{31}$$

これより，

$$\frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{1}{(\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2})^3} = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{32}$$

だから，

$$E(x,\, y,\, z) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\, 0,\, 0\right) \tag{33}$$

が得られる．