中学数学で分かる簡単なローレンツ変換の証明

2 つの慣性系 K と K' があり，K' 系は K 系に対して K 系の x 軸正の方向に速度 v で運動するものとする．K 系の原点 $x=0$ の時刻 $t=0$ の瞬間，K' の原点 $x'=0$ が時刻 $t'=0$ の瞬間にお互いの原点が一致するようにお互いの座標原点とお互いの座標原点に置かれた時計を合わせておく．このとき，どちらの系でも光の伝わる速さが等しくその速さは c になる，とすると慣性系 K と K' の間の座標変換は次に示すローレンツ変換となる．それを今から証明しよう．

まず，K 系の座標原点から時刻 $t=0$ に x 軸正の方向に発射された光の先端の座標は,

$$x = ct$$

ここで同じ光を K' 系で眺めると，K 系と K' 系の座標原点がそれぞれの時刻 $t=t'=0$ の瞬間に重なっていることより，K' 系でも K' 系の座標原点 $x'=0$ から時刻 $t'=0$ にやはり同じ向き，つまり，x' 軸が増える方向に進む．ここで光速度不変の原理より，K' 系でも同じ光の伝わる速さは一緒だから，結局 K' 系でも，そっくりな

$$x' = ct'$$

が成り立つ．ここでもちろん x', t' は K' 系において K 系の質点の位置と時刻に対応する座標です．これよりもし仮に考えている質点が仮に光だとすれば，$x - ct$ も $x' - ct$ もどちらも常に 0 になるはずです．一方この質点が普通の物体なら $x - ct$ も $x' - ct'$ もどちらも 0 にはならない．そこでこの条件を満たす最も簡単な式の形として，ある定数 λ を用いて,

$$x' - ct' = \lambda(x - ct) \tag{1}$$

の関係式が成り立つものと仮定しよう．いま，この式の形が条件を満たすものの中で一番簡単そうではあるが，これ以外ありえない，ということを示す

のは実はかなり難しい．そこでここではとりあえず，このような形の中から解を探してみる．すると実は幸いに求めたい解が実はこの条件を用いて得られることが示せる．

さて，今度は光の発射する向きを x 軸の負の向きにしてみよう．先ほどとは負号だけが変わり，光の先端の座標は，K 系では，

$$x = -ct$$

となり，K' 系では

$$x' = -ct'$$

となる．すると先ほどの質点の座標に対して，今度は別の定数 μ によって，

$$x' + ct' = \mu(x + ct) \tag{2}$$

が成り立つべきです．ここで式に現れる定数 μ が λ と異なる定数になることに注意が必要かもしれない．というのも，今度は光の発射方向と K' 系の K 系に対する運動方向の関係性が変わるため，比例定数がどうしても変わってしまうからです．

さて，この 2 つの関係式を用いて，早速ローレンツ変換を求めてみましょう．式 (2) と (1) の形より，とりあえず

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}, b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

と置いてみます．すると，簡単に

$$\lambda = a + b, \mu = a - b$$

が得られるので，これを式 (2) と (1) に代入すると，

$$x' + ct' = (a - b)(x + ct)$$

及び

$$x' - ct' = (a + b)(x - ct)$$

が得られるので，辺々足したり引いたりして，

$$x' = ax - bct \tag{3}$$

$$ct' = -bx + act \tag{4}$$

が得られることになります．

さてここで，K' 系の原点 $x' = 0$ は，式 (3) より，

$$0 = ax - bct$$

だから，

$$x = \frac{bc}{a}t \tag{5}$$

を満たす．

いま，K' 系が K 系に対して速度 v で運動していると仮定しているので，この点 $x' = 0$ の点は K 系から見ると，

$$x = vt$$

となっているはずです．そこで式 (5) と係数を比較して，

$$v = \frac{bc}{a} \tag{6}$$

が成り立つことになります．次に相対性原理より K' 系と K 系のどちらも対等であるので，K 系において静止した長さ 1 の剛体棒を K' 系で測った長さと，K' 系において静止した長さ 1 の剛体棒を K 系で測った長さは，等しいはずであることがわかります．そこで長さ 1 の剛体棒を K' 系の原点から x' 軸の正の方向に横たえたとしましょう．この棒は K 系から見ると運動をしているので，K 系から見てこの運動する棒の長さを測る際には，**瞬間写真**をとってその写真上の棒の長さで定義すべきです．これはつまり，運動する棒の両端の座標は**同時に**測定する必要があることを意味します．したがってこの棒の K 系での時刻 $t = 0$ での両端の座標は，$t = t' = 0$ の瞬間に K 系と K' 系のそれぞれの原点が重なっていることより，片方は K 系の原点

にあるので，もう片方の座標は K 系で見た運動する棒の長さになります．そこでこの運動する棒の長さを l と置くと，K 系で $t=0$ の瞬間に $x=l$ が K 系から見た棒の長さで，このとき K' 系での棒の長さ $=x$ 座標は $x=1$ なので，(3) に代入すると，

$$1 = al$$

が成り立ちます．つまり，

$$（K\text{ 系から見た運動する棒の長さ}）= l = \frac{1}{a} \tag{7}$$

が得られます．逆に K 系の原点から x 軸正の方向に長さ 1 の剛体棒を横たえたとしよう．このとき，K 系と K' 系の原点が $t=t'=0$ の瞬間に重なっていることより，K 系の原点にある側の棒の端は K' 系でもその瞬間 $t'=0$ において原点にある．すると K' 系でもう一方の側の座標は運動する棒の長さとなるから，相対性原理よりこれは l に等しいはずです．そこで，式 (3) と式 (4) を x について解くと，$(3)\times a+(4)\times b$ より，

$$ax' + bct' = a^2x - b^2x$$

だから，

$$x = \frac{a}{a^2-b^2}x' + \frac{b}{a^2-b^2}\cdot ct'$$

が得られるので，この式に $t'=0$ の瞬間の K' 系での先端の座標 $x'=l$ と K 系での先端の座標 $x=1$ を代入すると，

$$1 \quad = \quad \frac{al}{a^2-b^2}$$

より，

$$（K'\text{系から見た運動する棒の長さ}）= l = \frac{1}{a}\left(a^2-b^2\right) \tag{8}$$

となります．すると，式 (7) と式 (8) より，

$$\frac{1}{a} = l = \frac{1}{a}(a^2 - b^2),$$

つまり，

$$a^2 - b^2 = 1 \tag{9}$$

が成り立つことになります．すると式 (6) より，

$$b = \frac{a}{c} v \tag{10}$$

だから，これを式 (9) に代入すると，

$$a^2 - \frac{a^2}{c^2} v^2 = 1$$

より，$1/a$ が式 (7) によって運動する棒の長さだったことに注意すれば $a > 0$ なので，

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

また，式 (9) より，

$$|b| = \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1} = \sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left| \frac{v}{c} \right|$$

b は式 (10) より v と同符号なので，結局，

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c}$$

が得られる．以上をまとめると，結局，

ローレンツ変換（対称性が分かり易い表式）

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x - \frac{v}{c} ct \right)$$
$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

が成り立つことがわかった．これで x 軸方向のローレンツ変換の公式が求まったことになる．y，z 軸についての変換公式は，K' 系の x' 軸の負の方向に速度 v で運動する K'' 系を考えることにより，

$$y' = y$$
$$z' = z$$

が得られる．