中学数学で分かる簡単なローレンツ変換の証明の準備

ここでは，中学生レベルの数学のみを用いて，特殊相対論の主要な公式であるローレンツ変換を導くことにしよう．ローレンツ変換がちゃんと分かって使いこなせれば，ほぼ特殊相対論については卒業といってよいと思うので（多分），中高生並びに文系の皆さん，楽しみにして下さいね♪

とはいえ，本質的に特殊相対論のエッセンスがほぼ全て詰まっている公式なので，証明には相対論的な考え方という日常生活上の感覚とは大変異なる独特な考え方を理解しなければならない．というわけで数学的には易しくっても本当の意味で理解するのは難しいかも^^；なので，いきなり数式変形を始めても『？！　』となりそうなので，少し長いけど文章で下準備をします．

なお，証明は本質的には正しいものですが，分かり易さを最優先するためやや厳密性に欠く説明になっている部分があります．きちんとした理解をしたい方は“簡単相対論”ではなく“特殊相対論”の項をご覧下さいませ．

そもそもローレンツ変換って？

そもそも相対性理論が必要となる1つの理由は，ある物体の運動を静止した観測者の座標系で眺めた場合と，その観測者に対して等速直線運動をする観測者から眺めた場合の2つの立場で測ったときのそれぞれの位置と時間の対応関係がニュートン力学における公式（この公式をガリレイ変換と呼ぶ）だと上手くいかないというものがあります．歴史的には電磁気学の要請から，アインシュタインは1905年の論文でこの2つの立場で測ったときのそれぞれの位置と時間の対応関係を表す公式として，ニュートン力学のガリレイ変換ではなく，特殊相対論のローレンツ変換でなければならないということを示しました．ここではこのローレンツ変換の公式を最も簡単な方法で導きます．

慣性系とは？

慣性系とは力の働かない物体が全て静止か等速直線運動をするように見える座標系です．普通の意味で静止している観測者の座標系がこの条件を満たし，この観測者から測った位置と時間の組を静止系の座標系と呼びます．静止系に対して等速直線運動をする観測者から見たら，静止系で等速直線運動をする物体は速度こそ異なるものの，やはり等速直線運動（あるいは静止）して見えるので，これも慣性系となります．このとき，こちらの座標系を基準とすれば，さきほどとはあべこべに静止系が等速直線運動をしている座標系に見える．そこでそもそもどんな基準でも，絶対に静止している座標系はなく慣性系は基準こそ異なれど立場は対等という風に考えるのが相対性原理です．相対性原理はニュートン力学でも特殊相対論でもどちらの理論でも仮定します．それでは両者の違いは？

ローレンツ変換とガリレイ変換の違い

ニュートン力学でも，特殊相対論でも慣性系同士の座標を表す数値の対応関係は考えている 2 つの慣性系同士のお互いの相対運動だけで決まります．これは相対性原理があるからです．このとき，慣性系同士の座標の数値の対応関係を表す式を慣性座標変換の公式と呼びます．実はガリレイ変換もローレンツ変換もどちらも慣性座標変換の公式だったのです．

それでは両者の違いは一体何でしょうか？　実は，ニュートン力学における慣性座標変換がガリレイ変換で，特殊相対論における慣性座標変換がローレンツ変換なのです．両者は当然式の見かけも違いますが，それではその違いはどこから生まれてくるのでしょうか？　大雑把に言ってガリレイ変換はどんな慣性系でも全く同じように時間が流れるが同じ光を異なる慣性系で見るとその光の速さが変わるとするものです．一方ローレンツ変換はどんな慣性系でも全ての光の速さは一緒であるが，その代わりに慣性系同士で時間の

流れ方が変わってしまうというものです，実は，慣性座標変換をどのように数式で立てても，時間の流れと光の速さを両方不変にすることは無理なのです．このためガリレイ変換とローレンツ変換で光の速さか時間の流れが変わってしまうのです．

まずは簡単なガリレイ変換を見てみよう

さて，ここまで説明すれば，とりあえずローレンツ変換を説明できるのですが，はやる気持ちを抑えて，まずは簡単なガリレイ変換を見てみましょう．実はガリレイ変換がきちんと理解できると，ローレンツ変換の意味が分かり易くなるのです．

簡単のため，観測，あるいは測定する対象を x 軸方向のみとしましょう．もちろん通常物体の運動は縦・横・高さ方向の 3 つの成分があるので座標で書けば x, y, z 成分があるのですが，それはいきなり考えると難しいし，また本質的でもないので今は簡単に x 軸方向のみとします．実はアインシュタインも 1905 年の論文で x 軸方向のみのローレンツ変換を証明しているだけなのでがっかりしないで！

さて 2 つの慣性系を考えるとき，いま運動方向は x 軸方向のみなので便宜上，片方を“ 止まっている ”と見なすことにしましょう．相対性原理があるからどっちが止まっているということはないのですが，2 つの慣性系 K, K' を言葉の上でも対等に扱ってしまうと，やや混乱すると思われるので，とりあえず片方を“ 止まっている ”と見なすのです．これを静止系と呼び．文字 K で表すことにします．するともう 1 つの慣性系は K に対して等速直線運動をしているわけですが，いま考えている運動方向は全て K 系の x 軸方向なので，もう 1 つの慣性系は K 系に対して一定の速さで x 軸の正の方向か負の方向に運動していることになります．そこで速さの方向まで含めて，正か負のある実数 v によってもう 1 つの慣性系の K 系に対する運動を表すことにしましょう．このもう 1 つの座標系を K' 系と呼ぶことにします．

さてこれでお膳立てができました．ガリレイ変換とは次の公式で表される

K 系と K' 系の座標変換の公式です：

$$x' = x - vt \tag{1}$$
$$t' = t \tag{2}$$

ここで K 系で測った位置を x，時刻を t とし，同じものを K' 系で測ったものを x'，t' としています．また時刻 $t = t' = 0$ での座標原点をそれぞれ揃えて $x = x' = 0$ います．

さて，この公式の意味を考えてみましょう．まず，(2) 式の意味は K 系と K' 系で時間の流れ方が一緒ということです．これは簡単ですね^^;

さてもう 1 つの式 (1) はどうでしょうか？　仮に K' 系の原点の運動を考えてみます．K' 系は K 系に対して速度 v で運動しているわけですから，K' 系の原点，すなわち $x' = 0$ は $x = vt$ の位置にあるはずです，そこで (1) 式に $x' = 0$ を代入してみると，$0 = x - vt$ よりめでたく $x = vt$ が成り立つことが示されました．それではもう少し難しく K' 系で速度 u で運動する物体の運動が K 系から見るとどうなるか見てみましょう．例えば K 系を地上，K' 系を一定の速度 v で走る船とし，考える物体をその船の上で速度 u で歩く人としましょう．このとき，この人が地上から見て動く速さは**ガリレイ変換が正しいなら**式 (1) によって表されるはずです．そこで K' 系の時刻 $t' = 0$ に位置 $x' = 0$ にいた人は，K' 系の時刻 t' には位置 $x' = ut'$ にいることになります．したがってこれを式 (1) に代入すると

$$ut' = x - vt$$

が成り立つわけです．ここで式 (2) より t' を t に置き換えてよいので，結局

$$ut = x - vt$$

つまり，

$$x = (v + u)t \tag{3}$$

が成り立つことがわかりました．ここで，一定の速度で運動する物体の速さ＝進んだ距離 $\div$ 時間ですので，式 (3) において $x/t = v + u$ が地上から

見た速さになります．これは要するに速度 v で走る船の上を速度 u で走る人の運動速度は，地上から見ると $u + v$ の速度に見えるという意味です．この公式をニュートン力学における速度の加法則といいます．

さて，ここで船の上で歩く人を船から発射した光で置き換えてみましょう．すると，$u = c$ となるので，地上から見た光の速さは，$v + u = c + v$ となります．これでは同じ光の速さが地上と船の上で変わってしまうことになってしまう！

・・・なんだかがっかりするほど当り前ですね．ところが，この当たり前なことが本当は間違っているニュートン力学では成り立つけど本当は正しい特殊相対論では成り立たないのです！　そこで次にローレンツ変換を見てみましょう．