ポアソン括弧

量子論において正準交換関係はその構成においてきわめて重要かつ基本的な働きをする．古典論の範囲でそれに対応するのがこれから述べるポアソン括弧である．この項では量子論を念頭においてこのポアソン括弧を説明する．

ポアソン括弧の定義式

その意味などを説明するのでなければポアソン括弧自体の定義は簡単である: 正準変数 $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ とその関数 $A = A(\{q_i,\, p_i\})$, $B = B(\{q_i,\, p_i\})$ に対して,

$$[A,\, B]_C \overset{\text{def}}{=} \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \tag{1}$$

によって定義される $[A,\, B]_C$ をポアソン括弧式と呼ぶ．ポアソン括弧式の表記にはいろいろな書き方の流派があり，単に $[A,\, B]$ とする流派や，$\{A,\, B\}$ などと表す流派があるが，いずれも単に記号法上の問題で意味は一緒である．ここでは量子論に出てくる正準交換関係に $[A,\, B]$ を用いるのでそれとは微妙に違うとの意味合いを込めて，古典論（Clasical）の頭文字をとって $[A,\, B]_C$ と表すことにする．

定理 0.1. 正準変数の組 $\{q_i,\, p_i\}$ に対して，任意の物理量 A が $A = A(\{q_i,\, p_i\},\, t)$ で表されるとき，次が成立する：

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A,\, H]_C \tag{2}$$

但し，$\{q_i,\, p_i\}$ が正準変数であるとはある適当なハミルトニアン H に対して次の関係があるものをいう：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3}$$

証明.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \tag{4}$$

ここで (3) の関係式を用いると,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{5}$$

であるが，ここで最後の行はポアソン括弧の式の定義式そのものである．従って,

$$\sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = [A,\, H]_C \tag{6}$$

だから結局,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A,\, H]_C$$

が示された． □

この定理より，時間 t を直接（陽に）含まない一般化座標 $\{q_i\}$ や一般化運動量 $\{p_i\}$ に対しては，右辺初項が 0 つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t}q_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}p_i = 0, \tag{7}$$

となるから，（陰に含んでいるのは偏微分に影響を与えないことに注意）

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = [q_i,\, H], \tag{8}$$

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = [q_i,\, H], \tag{9}$$

が成り立つ．逆にこの式が成り立つとき，この式はハミルトンの正準方程式そのものを表すことを示す次の定理が成り立つ：

定理 0.2. $\dot{q}_i = [q_i,\, H]_C$ 及び $\dot{p}_i = [p_i,\, H]_C$ が成り立つとき，両式はハミルトンの正準方程式を表す．

証明.

$$\dot{q}_i = [q_i,\, H]_C = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_j \delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{10}$$

$$\dot{p}_i = [p_i,\, H]_C = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_j -\delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{11}$$

□

定理 0.3. ポアソン括弧式の変数に正準変数の組 $\{q_i,\, p_i\}$ を考えると，次が成り立つ：

$$[q_i,\, q_j]_C = 0, \tag{12}$$

$$[p_i,\, p_j]_C = 0, \tag{13}$$

$$[q_i,\, p_j]_C = \delta_{ij}, \tag{14}$$

証明.

$$[q_i,\, q_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right) = \sum_k (\delta_{ik}\cdot 0 - 0\cdot\delta_{jk}) = 0 \tag{15}$$

同様に,

$$[p_i,\, p_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right) = \sum_k (0\cdot\delta_{jk} - \delta_{ik}\cdot 0) = 0 \tag{16}$$

一方,

$$[q_i,\, p_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right) = \sum_k (\delta_{ik}\delta_{jk} - 0\cdot 0) = \delta_{ij} \tag{17}$$

となることが分かる． □