束縛条件下での運動方程式

この項では N 個の質点がある滑らかな束縛条件下に置かれているときの運動方程式を求める．

条件式の設定

N 個の質点をデカルト座標で表したとき，位置を表す座標成分は x, y, z の 3 つがあるので，合計 $3N$ 個の成分があることになるので，それを $\boldsymbol{x} = (x^\mu) = x^\mu$ と表す事にしよう $(1 \leq \mu \leq 3N)$．なお，この表記から分かるとおり x^μ は各成分を代表している場合と，全部をまとめたベクトルを表す場合の 2 通りがあることに注意しよう．同様に，全外力の和を $\boldsymbol{F'} = F'_\mu$ とし，質量を m_μ としよう．ここで，少なくともニュートンの古典力学で考える限り一つの質点の慣性質量はどの座標軸で考えても一緒だから，実際には m_μ のうち異なる成分は高々N 個しかない．しかし表現の上でそれらを異なるかのように扱っても一般的な議論ではあまり問題とならないであろうから，ここでは μ 番目の運動方程式に現れる慣性質量を m_μ で表す事にする．すると全ての運動方程式は,

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = F'_\mu \qquad (1 \leq \mu \leq 3N) \tag{1}$$

と表される事になる．さてここで明らかに (1) 式の左辺を右辺に移項すると次の形が得られる:

$$F'_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu = 0 \qquad (1 \leq \mu \leq 3N) \tag{2}$$

(1) 式と (2) は数学的には殆ど同じことを意味しているが，物理的には異なる解釈を与える事も出来る．即ち (1) 式を運動方程式とするのに対し，(2) 式は慣性力まで含めた場合の力のつりあいの式とみなす事である．一見するとこの変形は有意義な変形とは思われないかもしれない．しかしこの変形を行う事により，慣性力まで含めれば,ある瞬間に全外力がつりあっているとみなせるため，力がつりあっているときに適用できる仮想仕事の原理を用いる事ができるようになる．これをダランベールの原理と呼ぶ.

さて，ここで (1) の運動方程式が時間変化しない束縛条件 $g_\nu = g_\nu(\boldsymbol{x}) = 0$ $(1 \leq \nu \leq h < 3N)$ を満たしているものとしよう．ただし ν の動く範囲は解が存在しない $h > 3N$ と，束縛条件だけで解が一点に定まってしまう $h = 3N$ の場合を除いた，$h < 3N$ の場合を考えることにしよう．このとき，仮想仕事の原理と呼ばれる次のような原理が導かれる:

今，$3N$ 次元の空間の 1 点 $\boldsymbol{x}$ を $g_\nu(\boldsymbol{x}) = 0$ $(1 \leq \nu \leq h < 3N)$ という束縛条件を満たすように取る．このとき点 $\boldsymbol{x}$ から僅かに $\delta\boldsymbol{x}$ だけ離れたある点を $g_\nu(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = 0$ $(1 \leq \nu \leq h < 3N)$ と言う風にこの同じ束縛条件を満たすように取ったとしよう．このとき，この束縛条件を満たす出来るだけ簡単な運動方程式を求めるというのがここでの関心事である.

さて，慣性力まで含めればある一瞬に全外力が点 $\boldsymbol{x}$ つりあっているのであるから充分近くの $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ までこの質点を移動させる間，ずっと全外力の合計は殆ど 0 で変化しないとしてよい．従って，その間の仕事を内積を使って表すと,

$$\sum_{\mu=1}^{3N} (F'_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu) \cdot \delta x^\mu = 0 \tag{3}$$

が成り立つ事になる． ここで全外力のうち，束縛力を $\boldsymbol{R} = R_\mu$ とし，束縛力以外の外力を $\boldsymbol{F} = F_\mu$ とすると，$F'_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu = F_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu + R_\mu$ と表せる．すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{3N} (F'_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu) \cdot \delta x^\mu &= \sum_{\mu=1}^{3N} (F_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu + R_\mu) \cdot \delta x^\mu \\
&= \sum_{\mu=1}^{3N} (F_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu) \cdot \delta x^\mu + \sum_{\mu=1}^{3N} R_\mu \cdot \delta x^\mu \\
&= \sum_{\mu=1}^{3N} (F_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu) \cdot \delta x^\mu + \boldsymbol{R} \cdot \delta\boldsymbol{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで $R \cdot \delta\boldsymbol{x}$ は束縛力がする仕事であるが，束縛力の定義より束縛力は移動方向と直交するから 0 である．従って結局,

$$\sum_{\mu=1}^{3N}(F_\mu - m_\mu \ddot{x}_\mu)\cdot\delta x^\mu = 0 \tag{4}$$

が得られたわけだが，この式は (3) と比べると束縛条件が現れない点が異なる．一方，点 $\boldsymbol{x}$ も点 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ も束縛条件を満たしているから，

$$\delta g_\nu \stackrel{\text{def}}{=} g_\nu(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) - g_\nu(\boldsymbol{x}) = 0 - 0 = 0$$

が成り立つ．ここで全微分の性質より，

$$\delta g_\nu = \sum_{\mu=1}^{3N}\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = 0$$

が成り立つから，任意の関数 $\lambda^\nu = \lambda^\nu(\boldsymbol{x})$，$(1\le\nu\le h)$ を掛けて和を取っても，

$$\sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\sum_{\mu=1}^{3N}\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = 0 \tag{5}$$

を満たす．そこで (4) 式と (5) 式の和を取ると，

$$\sum_{\mu=1}^{3N}\left(F_\mu - m_\mu\ddot{x}_\mu + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu}\right)\delta x^\mu = 0 \tag{6}$$

ここで h 個の関数 λ^ν の自由度は h だから，(6) 式において， h 個の μ_i $(1\le i\le h)$ について，

$$F_{\mu_i} - m_{\mu_i}\ddot{x}_{\mu_i} + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^{\mu_i}} = 0 \tag{7}$$

となるように各 λ^ν を取れる．どの μ を選ぶかは自由だから，簡単のため全ての i で $\mu_i \ge 3N-h+1$ としよう．すると (6) 式は，

$$\sum_{\mu=1}^{3N-h}\left(F_\mu - m_\mu\ddot{x}_\mu + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu}\right)\delta x^\mu = 0 \tag{8}$$

となるが，今，束縛条件より δx^μ の自由度は h だけ少ない $3N-h$ であるので，δx^μ は $1\le\mu\le 3N-h$ で全て独立であるとしてよい．従って，(8) 式において括弧の中身が全て 0 であるとしなければならないから，

$$F_\mu - m_\mu\ddot{x}_\mu + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (1\le\mu\le 3N-h) \tag{9}$$

が成り立つ事が分かる．結局 (7)，(9) により全ての $1\le\mu\le 3N$ に対して，

$$F_\mu - m_\mu\ddot{x}_\mu + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{10}$$

が成り立つ事が分かった．ここで解くべき方程式の自由度は質点の位置を表す x^μ の $3N$ 個と，h 個の未知の関数 λ^ν の合わせて $3N+h$ であるが，(10) 式が $3N$ 個，束縛条件 $g_\nu(\boldsymbol{x})=0$ が合わせて h 個あるからこの方程式は解けることが分かる．(10) 式は，

$$m_\mu\ddot{x}_\mu = F_\mu + \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu} \tag{11}$$

と表され，これは運動方程式に他ならない事が分かる．この式を第一種のラグランジュ運動方程式と呼ぶ．また式に現れる F_μ は束縛力以外の全外力としたのであるから，後ろに続く

$$\sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu} \tag{12}$$

は，μ 成分の束縛力 R_μ に他ならない．実際，

$$\sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \sum_{\nu=1}^{h}\lambda^\nu g_\nu = 0 \tag{13}$$

が成り立つから，束縛力が仮想変位によって仕事をしないことが再確認できる．