ハミルトンの原理

古典力学を最小作用の原理で再構成した力学体系を解析力学というが，ここで最小作用の原理は一般にある作用積分の極値になってさえいればよく，最大値や変極点である場合もある．このため最小作用の原理は一般にハミルトンの原理や変分原理と呼ばれる．ここでは，質点系に対するハミルトンの原理を導く．

0.1　ハミルトンの原理を導く質点系の運動方程式を用意する

まず，n 個の質点からなる質点系をデカルト座標で，

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{1}$$

として用意する．このとき，運動方程式と，束縛条件から，

$$m\ddot{x}_i = \overline{F}_i \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{2}$$

$$g_\nu(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{3n}) = 0 \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \cdots,\, h), \tag{3}$$

が成り立っているものとすると，仮想仕事の原理とラグランジュの未定乗数法より，

$$m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{4}$$

が成り立つ．但し，F_i は束縛力以外の力の成分を表す．結局，解くべき方程式は，(4) と (3) からなる，

$$m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{5}$$

$$g_\nu(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, h) = 0 \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \cdots,\, h), \tag{6}$$

となる．

0.2 質点系に対するハミルトンの原理を導く

さて，このように用意した質点系に対しハミルトンの原理を次のようにして導く．

まず，デカルト座標 $x_i = x_i(t)$ に対して仮想的に変位させた座標を $\overline{x}_i = x_i + \delta x_i$ とし，系全体の運動量を T で表すと，

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \overline{T} - T dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\overline{x}}_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i + \delta \dot{x}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left\{ \dot{x}_i^2 + 2\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + (\delta \dot{x})^2 \right\} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left\{ 2\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + (\delta \dot{x})^2 \right\} dt \\
&\simeq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\delta x_i\right) dt \\
&= \left[\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i dt
\end{aligned}$$

ここで，積分の端点は固定されているため仮想変位 $\delta x_i = 0$ だから，一項目は全体が 0 になる．

$$= 0 - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i dt$$

ここで，$F_i \delta x_i$ は第 i 成分方向の束縛力以外の外力がする仮想仕事であるが，もともと束縛力は仕事をしないのだから単に第 i 成分方向の外力全体がする仮想仕事である．従ってこれを W_i と置けば，

$$\begin{aligned}
&= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} W_i dt \\
&= - \int_{t_0}^{t_1} W dt,
\end{aligned}$$

これより，

$$\therefore \int_{t_0}^{t_1} \delta T + W dt = 0, \tag{7}$$

が得られた．但し，W は質点に対する仮想仕事を表す．