1　オイラー・ラグランジュ方程式の導出

ここでは力がポテンシャルから導け，従ってラグランジアン L が定義できる場合について解析力学における運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導く．

オイラー・ラグランジュ方程式とは次のものであった:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

この式においてラグランジアン L は系全体の運動量を T，ポテンシャルを U と置いたとき，$L = T - U$ によって定義される量である（但しラグランジアンとして別の定義を持ってくることも可能である．）．この式はニュートンの運動方程式と本質的に同値であるが，この形式のままで使える座標が広義座標を含む幅広いものがあるのが特徴である．早速この式を導いてみよう．

まず最初にラグランジアンの変分が 0 であるという条件より，

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt + \left[\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt
\end{aligned}$$

ここで二項目は積分の端点が固定されているから全体が 0 になる．よって，

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_{i=1}^{3n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つが，t_0 と t_1 の間隔を微小にすると，この被積分関数は当然定数関数に近づくが，右辺が 0 のためその定数は 0 でなくてはならない．いま δq_i 達は微小の変位とはいえ 0 ではないから，δq_i が掛かっている括弧の中身が全て 0 であるはずである．よって，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

即ち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

が得られた．これを力がポテンシャルより導けず，ラグランジアンが定義できない一般のラグランジュ方程式と区別して，オイラー・ラグランジュの方程式と呼ぶ．

2 一般のラグランジュ方程式の導出

n 個の粒子からなる質点系が，h 個 $(h < 3n)$ の束縛条件 $g_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_{3n}) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, h)$ のもとにあり，この系を広義座標 q_r $(r = 1, 2, \cdots, 3n)$ で表したとき，系全体の運動エネルギー T が q_r の関数として与えられているとする．このとき束縛力以外の力を F_i $(i = 1, 2, \cdots, 3n)$ とし，

$$Q_r \equiv \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} F_i \qquad (r = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{1}$$

と置くと，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{2}$$

が成り立つ．ここで Q_r を広義の力と呼ぶ．

証明. まず，ハミルトンの原理より，この系に対する仮想仕事を W とすると，

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T + W dt = 0, \tag{3}$$

が成り立つ．そこでこの δT や W を求めてみよう．

まず，

$$\delta x_i = \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \delta q_r \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n), \tag{4}$$

が成り立つから，外力が仮想変位に対してなす仕事は，

$$W = \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{3n} F_i \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \delta q_r \tag{6}$$

$$= \sum_{r=1}^{3n} \left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) \delta q_r, \tag{7}$$

ここで括弧の中身は広義の力 Q_r に他ならないから，

$$W = \sum_{r=1}^{3n} Q_r \delta q_r \tag{8}$$

となる．一方運動エネルギー T は一般の座標の場合には $\{q_r\}$ と $\{\dot{q}_r\}$ の関数だから，

$$\delta T = \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r, \tag{9}$$

ここで，

$$\delta \dot{q}_r = \frac{d}{dt} \delta q_r, \tag{10}$$

が成り立っているから，部分積分によって，

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r dt = \left[\sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{3n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) \delta q_r dt \tag{11}$$

が成り立つが，右辺初項は積分の端点が固定されていることより 0 になってしまう．従って，結局ハミルトンの原理は，

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T + W dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{3n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + Q_r \right] \delta q_r dt = 0, \tag{12}$$

ここで t_0 と t_1 の間隔を微小にすれば，被積分関数は定数に近づくが右辺が 0 なので，当然 0 でなくてはならない．従って，

$$\sum_{r=1}^{3n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+Q_r\right]\delta q_r=0, \tag{13}$$

が成り立つ．ここで注意すべき点は $\sum$ の中身一つ一つまでは 0 と断定できないという点である．というのも束縛条件があるため各 δq_r のうち，独立な成分は $3n-h$ しかないから，その束縛条件に従うようにしか δq_{r} 達を動かせないからである．そこで，ここでラグランジュの未定乗数法を用いれば，適当な h 個の関数 λ_ν を導入して，

$$\sum_{r=1}^{3n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+Q_r+\sum\lambda_\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial q_r}\right]\delta q_r=0 \tag{14}$$

を得るが，λ_ν を上手く選ぶことによって，$r=1$ から $r=h$ まで全ての項の括弧の中身が 0 であるとしてよい．このとき，変数 r の独立な成分は丁度 $3n-h$ だから残りの δq_r は自由に動かしてよいため，結局残りの項の括弧の中身も全て 0 でなければならない．以上より，

$$\frac{\partial T}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+Q_r+\sum\lambda_\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1,\,2,\,\cdots,\,3n) \tag{15}$$

即ち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r+\sum\lambda_\nu\frac{\partial g_\nu}{\partial q_r} \qquad (r=1,\,2,\,\cdots,\,3n) \tag{16}$$

が成り立つことが分かった． □

以上の議論において，実はもっと話を単純にすることも出来る． 束縛条件 $g_\nu(q_1,q_2,\cdots,q_{3n})=0$ $(\nu=1,2,\cdots,h)$ において，広義座標 $q_{3n-h+1},\cdot,q_{3n}$ を束縛条件を満たす定数，

$$q_r=C_r \qquad (r=3n-h+1,\cdots,3n) \tag{17}$$

としてしまうと，(13) 式の後半の δq_r $(r=3n-h+1,\cdots,3n)$ は全て変位がないから 0 になってしまう．つまり，

$$\sum_{r=1}^{3n-h}\left[\frac{\partial T}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+Q_r\right]\delta q_r=0, \tag{18}$$

が成り立つが，残った q_r は全て独立変数であるから，結局，

$$\frac{\partial T}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)+Q_r=0 \qquad (r=1,\cdots,3n-h), \tag{19}$$

即ち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \qquad (r=1,\cdots,3n-h), \tag{20}$$

$$q_r=C_r \qquad (r=3n-h+1,\cdots,3n), \tag{21}$$

が成り立つことが分かる．